N. ROSSI - C. TONELLI

QUESTIONI DIDATTICHE DI ARITMETICA E GEOMETRIA

PER L'ULTIMO ANNO DELL'ISTITUTO MAGISTRALE E
PER LA PREPARAZIONE AGLI ESAMI DI CONCORSO MAGISTRALI

CASA EDITRICE GIUSEPPE PRINCIPATO

QUESTIONI DIDATTICHE
DI
ARITMETICA E GEOMETRIA

Rendete il vostro allievo attento ai fenomeni della natura, e ben presto lo renderete curioso; ma per alimentare la sua curiosità, non vi affrettate mai a soddisfarla. Proponetegli quesiti adatti alla sua mente e lasciateglieli risolvere. Che egli non sappia cosa alcuna perchè gliela avete detta voi, ma perchè l'ha compresa da sè; che non impari la scienza, ma la inventi. Se nel suo spirito sostituirete l'autorità alla ragione, egli non ragionerà più; non sarà che lo zimbello dell'opinione altrui.

G. G. ROUSSEAU. *Emilio*, Libro III.

N. ROSSI - C. TONELLI

QUESTIONI DIDATTICHE
DI
ARITMETICA E GEOMETRIA

PER L'ULTIMO ANNO DELL'ISTITUTO MAGISTRALE E
PER LA PREPARAZIONE AGLI ESAMI DI CONCORSO MAGISTRALI

CASA EDITRICE GIUSEPPE PRINCIPATO
MILANO - MESSINA

PROGRAMMA DI ARITMETICA E GEOMETRIA PER LE SCUOLE ELEMENTARI

CLASSE I

Procedimenti intuitivi per la conoscenza, scrittura e lettura dei numeri da 1 a 20. Numerazione progressiva e regressiva. Esercizi di calcolo orale. Composizione e scomposizione dei numeri. Esercizi graduati. Concetto intuitivo della decina e incolonnamento dei numeri. Pratici esercizi sulle quattro operazioni entro il 20 (addizioni senza riporto e sottrazioni senza prestito).

Rilievo intuitivo, fatto su cose, di forme geometriche. Disegno di tali forme.

Facili giochi aritmetici.

CLASSE II

Scrittura, lettura e incolonnamento dei numeri entro il 100. Esercizi di numerazione orali e scritti, in senso crescente e decrescente (di 2 in 2, di 3 in 3, ecc.). Esercizi orali sulle intuizioni di doppio, triplo, quadruplo, metà, terza parte, quarta parte, ecc., paio, decina, dozzina. Rapporto tra unità, decine, centinaia. Preparazione e apprendimento della tavola pitagorica. Esercizi di calcolo orale entro il 50.

Le quattro operazioni. Prestito e riporto. Moltiplicatore e divisore di una sola cifra. Problemi pratici, orali e scritti, che richiedano una sola operazione.

Rilievo intuitivo delle princ pali figure geometriche piane (quadrato rettangolo, triangolo, circolo) e dei solidi geometrici più comuni (cubo, cilindro, sfera). Esercizi di disegno relativi.

Facili giochi aritmetici.

CLASSE III

Scrittura e lettura dei numeri non oltre il 1.000. Esercizi di composizione e scomposizione dei numeri. Tavola pitagorica.

Calcolo orale intuitivo su quantità frazionarie. Numeri interi e decimali (non oltre i centesimi).

Moltiplicazione e divisione per 10 e per 100. Operazioni sugli interi e sui decimali (moltiplicatore di due cifre, divisore di una sola cifra). Spesa, ricavato, guadagno, perdita e loro rapporti. Problemi pratici, orali e scritti, che richiedono non più di due operazioni.

Sistema metrico decimale. Unità di misura, multipli e sottomultipli.

Cifre romane fino a dodici.

Rilievo e disegno di figure geometriche piane e di solidi geometrici. Nomenclatura. Calcolo dei perimetri del quadrato e del rettangolo.

Giochi aritmetici intenzionalmente formulati per facilitare calcoli e soluzioni di quesiti.

CLASSE IV

Numerazione entro il 10.000. Esercizi di lettura, scrittura, composizione e scomposizione dei numeri. Esercizi rapidi di calcolo orale. Operazioni orali e scritte sui numeri interi e decimali (divisione col divisore di 2 cifre).

Frazioni proprie e improprie. Frazioni decimali. Esercitazioni pratiche.

Il sistema metrico decimale nella sua formazione organica. Misure agrarie. Idea pratica delle equivalenze. Problemi pratici.

Figure piane regolari. Aree. Solidi geometrici. Disegno geometrico. Costruzione di solidi geometrici rappresentanti oggetti d'uso comune.

Lettura e scrittura dei numeri romani fino a 100. Trascrizione di numeri romani in cifre arabiche e viceversa.

Peso lordo, peso netto, tara, ecc. Problemi orali e scritti anche con più di due operazioni. Listini di prezzi, orari, tariffe, ecc. Esercitazioni elementari di contabilità (conti della cooperativa scolastica, della biblioteca, del giornalino della classe, ecc.).

Curiosità e giochi aritmetici e geometrici.

CLASSE V

Numerazione entro il milione e oltre. Calcolo orale e operazioni scritte con numeri interi e decimali.

Pratici esercizi per la riduzione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa. Le quattro operazioni sulle frazioni nei casi pratici più semplici.

Esercizi di lettura, scrittura e trascrizione in cifre arabiche di cifre romane e viceversa. Uso dei numeri romani oltre il mille.

Richiamo delle conoscenze organiche sul sistema metrico, con particolare riguardo alle misure cubiche. I solidi geometrici regolari. Superfici e volumi. Esercizi di disegno e di lavoro coordinati allo studio dei solidi geometrici. Problemi pratici, orali e scritti.

Casi intuitivi e pratici di rapporti e proporzioni. Quantità direttamente e inversamente proporzionali. Capitale, interesse, sconto, regola

del tre semplice (metodo di riduzione all'unità). Problemi pratici, orali e scritti.

Pratici esercizi di contabilità e scritturazioni varie. Compilazione di un modulo di vaglia, di conto corrente, di una distinta di versamento bancario, di una ricevuta commerciale. Lettera di commissione, nota delle spese, fattura, quietanza, ecc. Bilancio domestico. Scritturazioni contabili varie in relazione al cooperativismo scolastico.

Curiosità e giochi aritmetici e geometrici.

AVVERTENZE

L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria, principalmente nelle prime classi, deve tenere nel dovuto conto le immagini e le intuizioni di grandezza, di numero, di forma e di distanza che animano e arricchiscono il mondo in cui il bambino si va formando. Contare le cose e giudicarle quantitativamente, rilevare linee e figure è per il bambino esercizio gradito, dal quale deve partire e a cui deve continuamente riferirsi il lavoro di scoperta che egli compie in collaborazione con il maestro e i condiscepoli, in forma libera e autonoma, nuova, varia, attuale, più conversando che scrivendo.

Negli esercizi di calcolo, nello studio del sistema metrico, delle frazioni, della geometria, nell'acquisto delle cognizioni di computisteria, nella formulazione e risoluzione dei problemi, è necessario che il maestro valorizzi al massimo le possibilità intuitive degli alunni. Ciò porta ad un più cauto uso della numerazione, che non deve superare il limite delle concrete possibilità e necessità reali dell'alunno. Verrà naturalmente un momento in cui le esercitazioni, pur rimanendo nel campo della realtà del fanciullo, potranno spaziare in maniera più libera rispetto al concreto.

Per l'esigenza strettamente logica dell'aritmetica, è necessario che gl'insegnanti, più che sull'abbondanza numerica degli esercizi, puntino sulla qualità degli esercizi stessi. Si tratta di chiarire sempre e di precisare, seguendo procedimenti logici fondamentali su cui poggia ogni ulteriore progresso nel calcolo e nella risoluzione dei problemi. Così, ad esempio, le idee di spesa, ricavato, guadagno e dei rapporti relativi e quelle riguardanti l'entità di un lavoro, il numero delle persone ad esso adibite, il tempo necessario all'esecuzione e i rapporti tra tali dati, ben determinate che siano, costituiranno il mezzo sicuro per la risoluzione di ogni questione affine.

Nella formulazione di problemi ed esercizi, lavoro da farsi anche questo possibilmente dagli scolari, gioverà utilizzare, correggendole se del caso, le conoscenze che i fanciulli hanno sui prezzi delle cose, sulle tariffe di trasporto, sui salari, sugli stipendi, sui compensi della mano d'opera, ecc., perchè possa, anche così, stabilirsi una piena aderenza tra la scuola e la vita. Ciò che più importa, nella pratica dell'aritmetica, è di farne intuire il valore sociale, mettendo l'alunno in condizione di vivere reali situazioni di carattere economico, affinchè possa padroneggiarle. Particolarmente indicate, per questo, sono le forme di cooperativismo scolastico.

Si avrà cura che l'enunciato dei problemi e degli esercizi sia chiaro per evitare deviazioni ed errori nella risoluzione. Ogni problema venga prima risolto per intero mediante un processo atto a rivelare e formare le possibilità ragionative dello scolaro, il quale soltanto in un secondo momento passerà all'esecuzione delle operazioni. In ogni caso gli alunni saranno condotti a controllare le loro risposte, mediante tipi di domande logiche e progressive, che li inducano alla riflessione sulle soluzioni proposte. Solo così essi riusciranno a costruirsi un sistema coerente, a raggiungere cioè una tecnica aritmetica personale, nei limiti della loro esperienza.

Per gli esercizi di numerazione e di calcolo intuitivo nelle prime classi, il buon senso ha ormai condannato il vecchio pallottoliere, come tipica espressione dei sussidi didattici preformati e usati fino alla noia, con scadimento di qualsiasi interesse. Il vario, il nuovo, l'occasionale e tutti i mezzi sussidiari che rispondono a questi requisiti saranno meglio indicati per i predetti esercizi, che possono pure giovarsi dei giochi, del disegno e del lavoro.

Anche l'insegnamento del sistema metrico deve essere liberato dai formalismi del passato e dal peso degli interminabili esercizi scritti di riduzione. Oralmente, e sempre per le vie delle misurazioni pratiche, del giudizio e del ragionamento, si riuscirà meglio e più presto a chiarire i concetti di valore ed entità di ciascuna misura e dei rapporti corrispondenti. In quinta classe si potrà accennare a monete e misure di altri stati che non seguono il sistema metrico decimale.

L'insegnamento delle frazioni s'inizierà con esercizi intuitivi e pratici, facendo sempre riferimento a numeri decimali.

Per l'insegnamento della geometria, concetti e figure saranno rilevati dal mondo delle cose e ad esso dovranno essere riferiti, così come sarà fatto per gli esercizi, le misurazioni e i calcoli relativi. Le nozioni sui solidi troveranno sempre riferimento a cose esistenti nella realtà, così pure le figure piane e ogni elemento geometrico.

Come appare ovvio, il disegno e il lavoro dovranno largamente sussidiare l'insegnamento della geometria e della computisteria.

Così ancora taluni motivi morali e sociali, insiti nella computisteria (previdenza, risparmio, assicurazione, onestà negli affari, benessere economico, ecc.) si collocheranno per importanza al disopra della conoscenza stessa delle scritture contabili, pur dovendo anche ad essa la loro formazione e il loro consolidamento.

QUESTIONE DIDATTICA
SULLA SCRITTURA DEI NUMERI

Grande cura deve avere il maestro nell'insegnare ai bambini la scrittura dei numeri maggiori di 9, perchè la questione è più importante ed assai meno facile di quanto comunemente si crede.

Infatti mentre la scrittura dei numeri da 0 a 9 richiede solo uno sforzo di memoria per ricordare i simboli corrispondenti (*cifre*), quella di tutti gli altri numeri obbliga la mente a un certo ragionamento, più o meno lungo, che solo il continuo esercizio rende facile e spedito. Ma mentre i grandi trovano qualche difficoltà a scrivere con prontezza numeri di ordine superiore al miliardo, i piccoli cominciano a faticare sul numero 10, che richiede l'accoppiamento, in un certo ordine, di due simboli (0, 1).

Quindi il maestro affronterà il numero 10 solo quando gli scolaretti (1° elementare) avranno dato prova di conoscere con assoluta sicurezza il valore e il simbolo dei numeri precedenti (zero compreso). Le prove che il maestro può fare, per assicurarsi di ciò, sono molte; tali prove si dovranno effettuare precipuamente coi bambini più tardi (sempre che si tratti di elementi normali) e individualmente. Eccone una di esempio.

Nota. – L'esercizio concreta il concetto di numero, quale attributo di un gruppo d'oggetti, esprimente la quantità di essi, indipendentemente dai caratteri accidentali degli stessi, quali la forma, il colore, l'ordine ecc. (*vedi aritmetica razionale*).

Si dispongano sul pavimento, in ordine sparso, 8 palline di diverso colore e si inviti un bambino a « *vedere* » quante sono e scriverne prontamente il numero alla lavagna. Poi, mentre il bambino scrive, il maestro sottrae, di nascosto, 2 palline; quindi invita nuovamente il bambino a « vedere » se le palline sono ancora nello stesso numero o se ne mancano e quante ne mancano.

Questo esercizio può essere variato a piacere, con altri gruppi di palline, aggiungendone, invece che togliendone; le risposte e le scritture devono essere sicure e pronte da parte di tutti gli scolari.

Solo allora il maestro si accingerà a far conoscere alla classe i numeri fra 10 e 20, introducendo anche il concetto di *decina*.

Tale concetto è assolutamente fondamentale e non intuitivo, mentre il concetto di unità, pur essendo altrettanto fondamentale, è di immediata acquisizione, tanto che i bambini vi arrivano spontaneamente, fino dai primi anni di età, quando cominciano a distinguere l'*uno* dai *tanti*.

Sul concetto di decina il maestro insisterà perciò moltissimo, ricorrendo ad ogni accorgimento, sia presentando isolatamente gruppi di 10 oggetti come quantità unitarie, sia facendo stabilire relazioni di confronto fra un gruppo di 10 oggetti, o decina, e gruppi più o meno numerosi. Ecco alcuni esempi di esercizi.

Il maestro presenti alla classe un mucchietto di 10 bastoncini; un bambino, invitato a contarli, dirà che sono dieci; il maestro allora, legandoli insieme, ne faccia un fascetto e dica: « Questo è 1 decina di bastoncini ». Così farà chiudendo in un sacchetto 10 palline e presenterà il sacchetto rigonfio come una decina di palline. La fantasia suggerirà al maestro molte esperienze analoghe.

Quindi provveda ad altre esperienze di questo genere:

sulla cattedra disponga tre colonnine ciascuna di dieci monete tutte uguali; poi tolga alcune monete a una colonnina e le aggiunga a un'altra; quindi inviti più bambini a dire se ancora le tre colonnine sono tre decine, oppure no e a giustificare le relative risposte.

Qualche bambino risponderà che non sono tutte decine *solo* perchè non sono ugualmente alte. Allora il maestro disporrà sulla cattedra altre colonnine di dieci oggetti ciascuna (10 bottoni, 10 cartoncini, ecc.) e farà toccare con mano che si tratta di decine, anche se di altezza diversa e di diversa forma.

Tuttavia il concetto di decina non si può considerare sufficientemente chiaro nella mente del bambino, se questi non sa discernere prontamente le decine da altri gruppi quantitativamente diversi. È necessario perciò ricorrere ad altri esercizi, per esempio del tipo seguente.

Il maestro prenda tre sacchetti, nel primo dei quali chiuda 10 palline, dopo averle contate ad alta voce davanti alla classe; negli altri due metta due manciate di palline, prese a caso (purchè una maggiore e l'altra minore di 10) e chieda a vari bambini se anche in questi sacchetti sono racchiuse delle decine. I bambini dimostreranno di avere ben capito, se risponderanno solo dopo aver cercato di aprire i sacchetti, per contare le palline e se sapranno dire quante palline mancano in uno per avere una decina e quante nell'altro sono in più.

Solo a questo punto il maestro potrà affrontare il problema della scrittura dei numeri superiori a 9, facendolo prima sorgere nella mente degli allievi come una necessità, conducendoli poi alla risoluzione come ad una personale conquista. Ciò non è facile; implica il bisogno di sfruttare intuizione, fantasia, esperienza, per prepararsi alla lezione in modo adeguato, onde poter utilizzare, al momento opportuno, ogni reazione degli alunni per il fine prestabilito.

L'esempio di lezione che segue può dare l'idea di uno dei modi di affrontare la questione, pur difettando di quell'elemento essenziale che è la partecipazione viva della scolaresca.

Sui banchi, davanti ad ogni alunno, è stato precedentemente disposto un mucchietto di asticciole (meno di 20).

I bambini hanno contato, in silenzio, le proprie asticciole. Quelli che ne hanno avuto meno di una decina, invitati dal maestro sono andati uno per volta alla lavagna a scrivere in cifre il numero corrispondente al proprio mucchietto; nel controllo da parte dei compagni, guidati dal maestro, sorge una specie di gara eccitante l'attenzione di tutti.

MAESTRO. – Alzino ora la mano quelli che hanno sul banco più di una decina di asticciole. (*Rivolgendosi ad uno di essi*). Tu, quante ne hai?

BAMBINO. – Dodici.

MAESTRO. – Separane una decina. Che cos'hai ora sul banco?

BAMBINO. – Una decina e due asticciole.

MAESTRO. – Chi sa scriverlo alla lavagna?

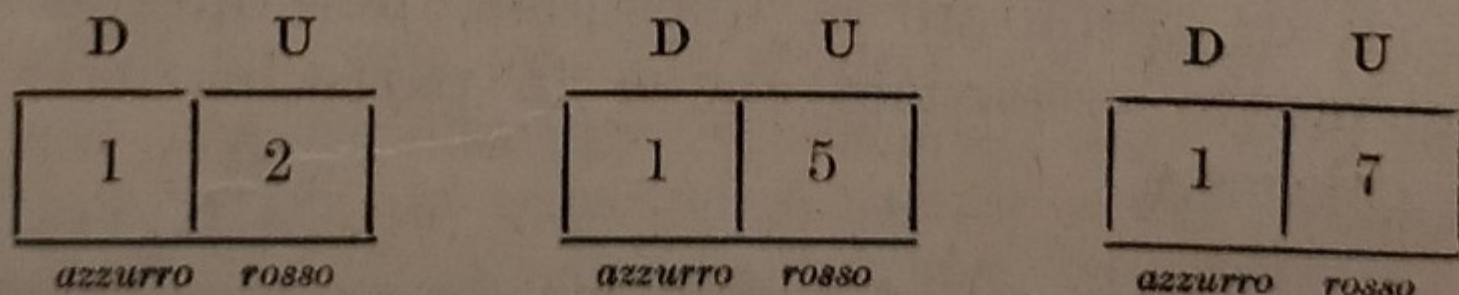
Il maestro sollecita, suggerisce indirettamente; si hanno varie prove negative; ma infine qualcuno scrive:

1 decina + due.

MAESTRO. – Bravo! Ora tutti quelli che hanno più di una decina vengano, uno alla volta, a scrivere sulla lavagna quante asticciole hanno sul banco.

La lavagna si riempirà di: 1 decina + 5
1 decina + 7, ecc.

di errori, anche; il controllo e la correzione da parte dei compagni farà raggiungere alla classe un alto livello di interesse. A questo punto il maestro fa notare che la scrittura è lunga e scomoda e propone un accorgimento che semplifica tutto. Disegna sulla lavagna due quadratini così:

ed invita i bambini, uno per volta, a scrivere nel quadrato azzurro la loro decina e in quello rosso le loro unità; si avranno figure di questo genere:

che i bambini ripeteranno sul loro quadernino.

Maestro. – E quelli che sul banco hanno *solo* 1 decina, cosa scriveranno nei quadratini azzurro e rosso?

Sorge un'altra gara e infine qualcuno arriverà a scrivere:

D	U
1	0
azzurro	*rosso*

La decina è simbolicamente scritta e con essa tutti i numeri fino a 20 escluso.
In seguito il maestro farà notare che i contorni dei quadratini possono essere tralasciati, semplificando in tal modo la scrittura, purchè si ricordi che il primo posto a sinistra è quello delle decine, mentre il secondo è quello delle unità.

La scrittura dei numeri da 20 a 100 (escluso) non presenta difficoltà nuove; basta ricorrere ai soliti gruppi di oggetti, facendo da essi estrarre dai bambini, tutte le decine contenute e facendo rappresentare poi il numero totale degli oggetti secondo il meccanismo già visto.

Anche il concetto di centinaio è di abbastanza facile acquisizione, sia come nuova unità (del 3º ordine), sia come gruppo di 10 decine. L'insegnamento si svolge in modo analogo a quello già visto per la decina, anche per quanto riguarda la scrittura dei numeri di tre cifre.

Per analogia, astraendo (gli innumerevoli esercizi fatti e la maggiore età degli alunni lo consentono), si insegnano le unità degli ordini successivi (4º, 5º, 6º 7º, ecc.) e la scrittura di qualunque numero superiore a 1.000.

Un alunno potrà essere ritenuto padrone della scrittura dei numeri, solo se saprà prontamente disporre le cifre, rappresentanti le unità dei vari ordini, nei posti ad essi corrispondenti. Per giungere a questo scopo bi-

---

Nota. – La lezione suesposta pone le basi per la scrittura di qualunque numero intero, nel sistema di numerazione decimale, in forma di allineamento nel quale la cifra, come si sa dall'aritmetica razionale, ha due significati: quello assoluto e quello relativo al posto occupato.

sogna esercitare il bambino su una vasta gamma di esercizi molto vari.

Eccone alcuni tipi.

1) Copiatura dalla lavagna e successiva lettura di gruppi di numeri.

2) Scrittura in forma di allineamento di numeri dettati nella stessa forma.

3) Trascrizione in forma di allineamento di numeri dati in forma polinomiale.

Esempio: 4 migliaia e 7 unità = 4.007
2 migliaia e 12 decine = 2.120

4) Scrittura in forma polinomiale di numeri dettati in forma sintetica.

Esempio: 318 = 3 centinaia + 1 decina + 8 unità =
= 300 + 10 + 8.

5) Scrittura in forma sintetica di numeri dati in forma polinomiale coi termini non ordinati.

Esempio: 2 unità + 4 migliaia + 3 decine = 4.032.

La lettura dei numeri, insegnata e fatta secondo le note regole, va effettuata sempre, in ogni tipo di esercizio.

Osservazione. – Alla base di tutto l'insegnamento sopra considerato sta la sicurezza nella numerazione orale e scritta, progressiva e regressiva, per unità dei vari ordini (per 1, per 10, per 100 ecc.) e per gruppi delle stesse (per 7, per 30, per 200 ecc.). Si noti, a questo proposito, che gli alunni incontrano una sensibile difficoltà quando, nella numerazione regressiva, devono passare da un numero formato di decine o di centinaia ecc. al numero precessivo (che precede di 1 unità semplice).

Esempio: da 70 a 69
da 1200 a 1199 ecc.

Si consiglia di affrontare la difficoltà subito agli inizi (20 e 19, 30 e 29, ecc. 80 e 79) ricorrendo a esercitazioni con gruppi di oggetti (bottoni, coralli, dischetti ecc.).

NOTA STORICA.

NUMERAZIONE. – *I popoli selvaggi, le popolazioni antichissime e i bambini si servirono (e si servono), per rappresentare i numeri, di mezzi strumentali: aggregati di oggetti materiali, quali le file o mucchietti di pietruzze, i nodi fatti su apposite cordicelle (Messicani e Peruviani), le tacche su pezzi di legno, ecc.*

Ma il mezzo strumentale più generalmente usato è la mano stessa dell'uomo, o le due mani riunite. In questa rappresentazione gli antichi erano particolarmente abili e ne avevano fatto una vera arte, dai Romani chiamata «indigitatio», che, comune a molti popoli, poteva essere considerata un linguaggio numerico universale.

L'indigitazione, molto in uso anche in Italia fino al Rinascimento, portò inizialmente ad un sistema quinario; da questo, con ulteriore progresso derivò il sistema decimale, *pure antichissimo. Ne dà anche un cenno Aristotele nei suoi problemi.*

I sistemi di numerazione greco e romano erano basati su una legge esclusivamente additiva.

Invece i popoli orientali (cinese, indiano) fin da tempi remotissimi ebbero sistemi di numerazione che includevano una legge moltiplicativa per i simboli adoperati. Essi dapprima, per rappresentare il numero 20 e il numero 30, ecc. posero il simbolo del 2 e del 3 accanto a quello del 10 (a lato, o sopra) e così per il 200, per il 300, ecc. accanto a quello del 100. In seguito tralasciarono di scrivere il simbolo del 10, o del 100, ecc. e, in tal modo, alle cifre 2, 3, ecc. risultò un valore di «posizione»; la moltiplicazione per 10, o per 100, ecc. fu, dunque, semplicemente indicata dalla posizione relativa delle cifre formanti il numero.

Così ad esempio, presso i Cinesi, inizialmente, essendo:
$=$ *simbolo del 2;* $+$ *simbolo del 10;* /(*simbolo di 8, la scrittura*

$\overset{=}{+}$ *significò 20 e la scrittura* $\begin{matrix}=\\+\\/(\end{matrix}$ *significò 28; poi venne tralasciato il segno* $+$, *quando non si ingenerava equivoco; così si ebbe per 28 la scrittura* $\overset{=}{/(}$

Gli Indiani conoscevano il principio di posizione fin dal V secolo (dopo Cristo) e lo completarono con l'uso dello zero (segno posto per le unità che non compaiono nel numero) verso il secolo VII.

Gli Arabi, che dapprima usarono una numerazione simile a quella dei Greci e dei Romani, appresero dagli Indiani il nuovo sistema di numerazione e lo diffusero in occidente, soprattutto per opera di Maometto di Moisè Alkhovaresmi (prima metà del IX secolo dopo Cristo).

È merito dei mercanti italiani e specialmente di Leonardo Fibonacci detto Pisano, figlio di uno di essi, l'aver diffuso per tutta Europa la numerazione indiana.

A Leonardo Pisano si deve la riunione delle varie cognizioni in un ben organico corpo di scienza che fu origine e base del risorgimento scientifico in occidente (1202 – Liber Abbaci).

QUESTIONI DIDATTICHE SULLE FRAZIONI

Gli alunni, in generale, trovano difficoltà molto grande nella risoluzione di problemi con dati frazionari. Tali problemi non sono concettualmente più difficili di quelli con dati interi. La difficoltà deriva soprattutto dalla poca chiarezza dei concetti, dovuta all'insegnamento prevalentemente meccanico e affrettato delle frazioni e al conseguente apprendimento puramente mnemonico da parte degli alunni. Per ovviare, fin dove è possibile, a questi gravi inconvenienti, il maestro comincerà coll'introdurre il concetto di *unità frazionaria*, insistendo molto *sull'uguaglianza delle parti in cui l'intero viene diviso*, caratteristica, questa, essenziale, che, se non è fatta insistentemente rimarcare, non viene colta dagli alunni, con la conseguente meccanicità nell'apprendimento di tutto il resto.

La questione non è facile, come sembra a molti; può considerarsi risolta, solo quando l'alunno dimostri di aver capito che una rappresentazione simbolica della parte di una grandezza è possibile, esclusivamente se la grandezza viene divisa in parti tutte uguali fra loro.

NOTA. – Si richiamano alla memoria i concetti di unità frazionaria e di frazione, noti dall'aritmetica razionale: l'unità frazionaria è il numero rappresentante una delle parti aliquote dell'intero; la frazione è l'insieme di più unità frazionarie uguali.

ESEMPIO DI LEZIONE SULL'UNITÀ FRAZIONARIA.

Il maestro ha preparato sulla cattedra 2 mele, 2 tavolette di cioccolato, vari dischetti uguali di carta, diversamente colorati.

Suscita subito l'interesse della classe sezionando una mela in due parti uguali e l'altra in due parti evidentemente diverse.

MAESTRO (*mostrando una delle parti della prima mela*). – Questa che cos'è?

BAMBINI (*in coro*). – Mezza mela!

MAESTRO (*mostrando l'altra parte*). – E questa?

BAMBINI. – Mezza mela.

MAESTRO (*mostrando le due parti in cui è stata divisa la seconda mela*). – Allora anche queste sono 2 mezze mele.

Alle proteste inevitabili dei bambini, facendo notare che anche ora le parti sono due, come prima, il maestro risponde ponendo la questione:

— Chi sa dire, allora, perchè i primi due pezzi sono mezze mele e questi due no? —

L'attenzione si fa più viva; molte manine si alzano; si scopre subito che i pezzi, metà di una mela, sono uguali.

MAESTRO. – Non basta, dunque, per avere mezza mela, dividerla in due parti?

BAMBINI. – No.

MAESTRO. – *Come* bisogna dividerla?

BAMBINI. – In due parti uguali.

A questo punto il maestro fa sorgere il problema di rappresentare sulla lavagna, in modo semplice, che tutti capiscano, la metà di una qualunque cosa.

Sente le eventuali proposte dei bambini; le discute; la lezione si anima sempre più; gli sviluppi non del tutto prevedibili, possono dipendere dalle varie osservazioni e dal modo di saperle sfruttare opportunamente; infine il maestro propone questa soluzione.

MAESTRO. – La mela è stata tagliata; disegniamo una sbarretta orizzontale che esprima questa divisione (*va alla lavagna e disegna* —).

Per ricordare che le parti ottenute sono due, scriviamo questo numero sotto la sbarretta, così:

$$\overline{}\atop 2$$

Ma noi vogliamo rappresentarne *una sola*; scriviamo perciò uno sopra la sbarretta, così:

$$\frac{1}{2}$$

Abbiamo ottenuto un nuovo numero che si legge « un mezzo » e che serve a rappresentare sia l'una che l'altra metà della mela, perchè esse sono uguali.

I due pezzi dell'altra mela, invece, essendo diversi, non possono essere rappresentati dallo stesso numero —.

Passa ora alle tavolette di cioccolata; ne prende una e, seguendo le incisioni, la divide in parti uguali, per esempio 6. Le fa contare, poi, mostrandone una, chiede chi sa scrivere alla lavagna il numero che la rappresenta. Si alzerà qualche mano; i bambini verranno chiamati uno alla volta; vari sbaglieranno, ma qualcuno, sotto la guida indiretta ed abile del maestro, arriverà a scrivere:

$$\frac{1}{6}.$$

MAESTRO. – E per le altre parti della tavoletta?

BAMBINI. – Sono tutte uguali alla prima!

MAESTRO. – Ripeteremo lo stesso numero, che si leggerà « *un sesto* ».

Il maestro spezzi allora la seconda tavoletta di cioccolata in 6 pezzi diversi e inviti i bambini a giudicare se anche questi si possono rappresentare col numero

$$\frac{1}{6}.$$

I pareri saranno probabilmente discordi; ci sarà una discussione e la questione potrà considerarsi risolta, solo quando tutti converranno che *tale notazione non può essere usata, perchè, a*

pezzi diversi della medesima grandezza, non possono corrispondere numeri uguali.

La lezione procede e si completa.

Il maestro, distribuiti i dischi colorati, facendoli ripiegare dai bambini in 2, 4, 8, ecc. settori uguali, realizza esercizi vari per la scrittura e la lettura di unità frazionarie diverse

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}.$$

In una lezione successiva il maestro procederà a controllare il grado di assimilazione del concetto di unità frazionaria, con esercizi vari, tra i quali proponiamo i seguenti di carattere pratico.

1) Si distribuiscano dischi di cartoncino, come nella precedente lezione, ed insieme settori dello stesso raggio corrispondenti a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ dei dischi distribuiti (1 settore alla volta per ogni bambino).

Ogni alunno dovrà, con l'aiuto tempestivo del maestro, portare il proprio settore consecutivamente sul proprio disco, fino a scoprire quale unità frazionaria esso rappresenti.

2) Si distribuiscano poi altri settori dello stesso raggio, dei quali alcuni corrispondono a unità frazionarie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc., altri no.

I bambini, ancora guidati dal maestro, dovranno saper decidere se il proprio settore rappresenta una unità frazionaria del disco, oppure no e dovranno dare giustificazione della loro risposta.

3) Si distribuiscano ancora (dopo aver ritirato tutto il materiale precedente) dei settori diversi: a un bambino $\frac{1}{3}$ di cerchio, a un altro $\frac{1}{4}$, a un altro ancora $\frac{1}{6}$ ecc.; poi si invitino i bambini a ritagliare (a casa propria) tanti settori uguali a quello consegnato, fino a poter formare un disco intero; ognuno potrà così scrivere sul proprio settore l'unità frazionaria corrispondente.

In successive lezioni il maestro insegnerà a calcolare il valore di unità frazionarie di date quantità: somme di danaro, pesi di merce, lunghezze, ecc.; si servirà di *molti, facili* esercizi orali e anche di problemi scritti, sia diretti che inversi.

Eccone alcuni di esempio.

Problemi diretti.

(1) La mamma ha nella borsetta L. 936; ne dà $\frac{1}{3}$ a me. Quale somma ricevo?

(2) In un sacchetto Mario ha 138 palline; volendone regalare $\frac{1}{6}$ a Luigi, quante palline gli darà?

ecc. ecc. ecc.

Problemi inversi.

(1) Un mercante ha venduto della tela di una pezza avanzandone m. 14, proprio $\frac{1}{5}$ della pezza intera.

Quanti metri era lunga tutta la pezza?

(2) Un fruttivendolo ha venduto $\frac{1}{4}$ delle mele contenute in una cesta, ricavandone L. 215. Quanto avrebbe ricavato, se avesse venduto tutte le mele della cesta?

(3) Quale unità frazionaria rappresenta 25 rispetto a 100? E 15 di 45? E 21 di 105?

(4) Ho L. 820; ne spendo L. 205; quale unità frazionaria?

(5) Di un sacco di riso che pesa kg. 96, se ne vendono kg. 16. Quale unità frazionaria del riso si vende?

Osservazione. – Gli esercizi diretti si possono fare anche in 3ª elementare; quelli inversi sono adatti alla 4ª.

Si insista sempre nel bandire qualunque forma di meccanicismo, pretendendo che lo scolaro sappia spiegare, oralmente, la risoluzione effettuata.

Lezione sul concetto di frazione

Sono fissati al muro, ben visibili da tutta la classe, due grandi dischi, divisi rispettivamente in 8 e in 12 (*vedi nota a piè di pagina*) settori uguali, diversamente colorati.

Maestro. – (*mostrando uno dei settori, per esempio quello rosso del primo disco*). – Che parte è questo del disco?

Alunni. – Un ottavo.

Il maestro scrive sulla lavagna $\frac{1}{8}$ e chiede perchè si scrive «uno» sopra la sbarretta; accentua bene la parola «uno» per suggerire indirettamente le risposte dei bambini.

Nota. – Per dividere un disco in 12 parti uguali, prima lo si divide in 6 parti uguali, portando sul contorno sei volte un'apertura di compasso uguale al raggio, poi si biseca ognuno dei settori uguali ottenuti.

ALUNNI (*eventualmente aiutati dal maestro*). – Perchè rappresentiamo una sola delle otto parti uguali in cui il disco è stato diviso (*vedi lezione sull'unità frazionaria pag.* 12).

MAESTRO (*segnando sullo stesso disco due settori consecutivi*). – E allora se vogliamo rappresentarne due (*accentuando bene* « *due* ») di queste parti?

ALUNNI. – Scriviamo il 2 sopra la sbarretta.

MAESTRO (*scrivendo sulla lavagna*). – Dunque scriviamo così:

$$\frac{2}{8}$$

e leggiamo « due ottavi ».

Il maestro ora segna, sempre sul primo disco, tre settori consecutivi e chiede ai bambini come si possano rappresentare le tre parti insieme.

Gli alunni arriveranno facilmente all'osservazione che basta scrivere « tre » sopra la sbarretta.

MAESTRO (*scrivendo*). – E come si legge?

ALUNNI. – Tre ottavi.

La lezione continua con esercizi vari; il maestro distribuisce a ognuno un dischetto di carta bianca, che fa ripiegare in quattro settori uguali e, partendo dal noto concetto della quarta parte $= \frac{1}{4}$, guida i bambini, in modo analogo al precedente, ai concetti e alla scrittura dei $\frac{2}{4}$ e dei $\frac{3}{4}$.

Con una tavoletta di cioccolato, divisa, secondo le proprie incisioni, in 12 quadretti uguali, partendo dal concetto della dodicesima parte $= \frac{1}{12}$, invita gli scolari a identificare e a scrivere i: $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{7}{12}$, ecc.

A questo punto il maestro, dopo aver fatto constatare che ogni settore del 2º disco appeso al muro è $\frac{1}{12}$ del disco stesso,

fa venire i bambini uno per volta a segnare col dito il contorno di un settore corrispondente a un certo numero di dodicesimi:

$\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$; $\frac{8}{12}$, ecc.

In una lezione successiva il maestro può procedere ad altri esercizi più difficili; ne riportiamo qualcuno di esempio.

Distribuiti agli alunni dischetti uguali di carta bianca e fattili successivamente ripiegare in modo da ottenere 16 settori uguali, il maestro scrive sulla lavagna il numero $\frac{5}{16}$ ed invita gli allievi a colorare in azzurro la parte del proprio disco rappresentata dal numero scritto.

Qualcuno eseguisce bene e qualcuno male; la correzione degli errori viene fatta collettivamente ed attraverso ad essa viene messo bene in luce che per ottenere i $\frac{5}{16}$ del disco, è stato necessario dividerlo prima in sedici settori uguali e poi, di questi, considerarne cinque.

Distribuiti poi altri dischetti bianchi, il maestro scrive alla lavagna il numero $\frac{3}{8}$ ed invita gli alunni a colorare in rosso la parte corrispondente del proprio disco.

L'esercizio non è facile, perchè i dischetti non sono stati fatti preventivamente ripiegare; le perplessità e gli errori saranno quindi parecchi; il maestro dovrà intervenire in modo da aiutare e correggere indirettamente.

A questo punto si può effettuare anche il terzo esercizio.

Distribuiti settori di ugual raggio, già preparati e corrispondenti rispettivamente a:

$\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{10}{16}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{14}{16}$, $\frac{15}{16}$

dei dischi già distribuiti agli alunni, il maestro li invita a determinare, ognuno, la frazione corrispondente al proprio settore (frazione che *non* è segnata sul settore stesso).

Il suggerimento di sovrapporre il settore ricevuto al disco conveniente (ogni alunno ha due dischi, divisi, rispettivamente, in 8 e in 16 parti uguali) venga dato individualmente e solo quando sia assolutamente indispensabile.

In questo esercizio, più che nei precedenti, sarà utilissima la continua assistenza del maestro, che dovrà guidare l'allievo in modo, che questi creda di risolvere il proprio problema con le sole sue forze.

Si consiglia di non introdurre subito, come parrebbe logico ed immediato, i termini: *frazione*, *numeratore*, *denominatore*; è meglio aspettare che altri esercizi, fatti in giorni successivi, imprimano profondamente nella mente dei ragazzi la diversità di significato del numero che sta sopra la sbarretta, rispetto a quello che sta sotto.

Tali esercizi, partendo dal concreto, si faranno sempre più astratti fino a che i bambini sapranno determinare con sicurezza le frazioni sia di grandezze che di numeri. Eccone alcuni orali, graduati, di esempio:

1) Se divido le palline contenute in un sacchetto in 4 mucchietti uguali e di questi ne prendo tre insieme ottengo i .... di tutte le palline.

2) I $\frac{3}{4}$ di una certa somma si ottengono dividendo la prima in .... parti uguali e prendendone poi .... di queste.

3) Se divido un numero in 5 parti uguali e di queste ne considero 4 insieme, ottengo i ... del numero.

4) I $\frac{17}{25}$ di un certo carico di grano si ottengono di-

videndo prima il carico in .... parti uguali e prendendone poi .... di queste.

5) Quanto vale $\frac{1}{6}$ di L. 30? E $\frac{5}{6}$ di L. 30?

(Si consigliano molti esercizi di questo genere e di quelli seguenti).

6). Che unità frazionaria è 7 di 35? Quanto valgono allora i $\frac{2}{5}$, i $\frac{3}{5}$, i $\frac{4}{5}$ di 35?

7). Divido una pezza di tela lunga m. 48 in sei parti uguali; di queste ne prendo cinque; quanti metri ottengo? E questo numero di metri, rispetto all'intera pezza, in che modo possiamo rappresentarlo?

Contemporaneamente, prima di insegnare la terminologia della frazione, il maestro troverà il modo, durante le lezioni di lingua italiana, di spiegare che « contare » significa anche « numerare », che « denominare » vuol dire dare il nome a una cosa, che « frazionare » una grandezza significa dividerla in parti uguali; farà svolgere, anzi, adatti esercizi sull'uso dei sinonimi suddetti.

Raggiunta così una sufficiente sicurezza su quanto riguarda il concetto di frazione e preparato il terreno alla terminologia, il maestro potrà finalmente dire perchè:

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$, ecc. si chiamano *frazioni*.

Farà notare poi che i numeri 4, 5, 6, 8, ecc., oltre che esprimere in quante parti uguali è stato diviso l'intero, dànno anche il nome a queste parti (si leggono infatti « quarti », « quinti », « sesti », « ottavi », ecc. e non quat-

tro, cinque, ecc.); per tale ragione i numeri 4, 5, 6, 8, ecc. si chiamano « *denominatori* ».

Invece i numeri che stanno sopra la linea di frazione, 1, 2, 5, ecc. si chiamano « *numeratori* » poichè esprimono quante sono le unità frazionarie che compongono la frazione stessa.

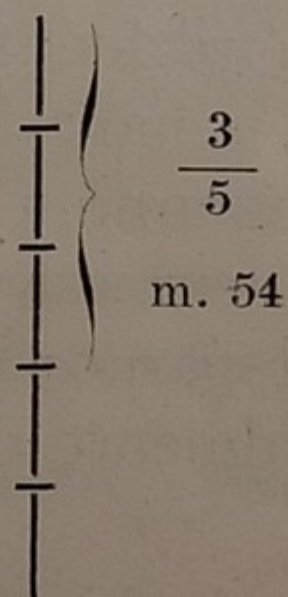
Solo dopo un congruo numero di lezioni, necessarie per svolgere in modo adeguato gli argomenti suesposti, il maestro può iniziare la risoluzione dei problemi inversi sulle frazioni, difficili perchè richiedenti una padronanza assoluta di concetti.

È necessario procedere pazientemente con lentezza e cautela, risolvendo per parecchio tempo i problemi in comune.

Esempio di problema inverso con guida alla risoluzione.

Problema. — I $\frac{3}{5}$ di una fune sono lunghi m. 54. Quanto è lunga l'intera fune?

Risoluzione.

$\frac{3}{5}$ m. 54

Si fa disegnare la fune e si fanno segnare sul segmento rappresentativo i $\frac{3}{5}$ dello stesso. Si fa osservare che i $\frac{3}{5}$ sono lunghi m. 54 e si fa scrivere sul quaderno:

$\frac{3}{5}$ della fune equivalgono a m. 54.

Poi si domanda di calcolare quanto è lungo $\frac{1}{5}$ soltanto.

Il calcolo richiede di fare la divisione per 3, come qualche alunno più svelto riesce a capire, esaminando la figura. Persuasi tutti gli alunni, si fa scrivere sul quaderno:

$\frac{1}{5}$ equivale a m. 54 : 3 = m. 18.

A questo punto è abbastanza facile far ricavare che, essendo la fune costituita da 5 quinti lunghi ciascuno m. 18, la sua lunghezza sarà:

$$m.\ 18 \times 5 = m.\ 90$$

Risposta. — La fune intera è lunga m. 90.

Frazioni proprie e improprie

Anche i concetti di frazione propria e impropria sono spesso acquisiti in modo del tutto mnemonico, così che molti scolari, a distanza di tempo, chiamati a riconoscere se una frazione è propria o impropria, rispondono a caso.

Bisogna dunque, anche in questo argomento, fin dalla scuola elementare procedere con cautela, introducendone i concetti con suggestive esercitazioni pratiche, fissandoli poi con numerosi esercizi diretti e inversi.

Ecco un esempio di come può essere trattata la questione.

Il maestro distribuisca ad ogni alunno un dischetto azzurro e inoltre: 3 settori bianchi, 13 gialli e 16 rossi, tutti uguali a $\frac{1}{8}$ del disco azzurro.

Gli alunni, invitati dal mestro, sovrappongono al disco azzurro, uno consecutivo all'altro, i tre settori bianchi; uno dei fanciulli esce poi a scrivere sulla lavagna la frazione esprimente la parte di disco ricoperta.

Quindi il maestro, fatto notare che anche ogni settore giallo è un ottavo del disco, fa contare tutti i settori gialli e chiama un alunno a scrivere sulla lavagna la frazione corrispondente al loro insieme.

Sulla lavagna appaiono dunque scritti i due numeri:

$$\frac{3}{8} \qquad \frac{13}{8}.$$

A questo punto gli alunni sono invitati a disporre i settori gialli sullo scrittoio, uno consecutivamente all'altro.

Dopo qualche istante la scolaresca si agita, molti alzano la mano per dire al maestro che i settori gialli sono troppi, perchè, malgrado i tentativi, si forma sempre un disco intero (uguale a quello azzurro) con l'avanzo di cinque settori gialli.

Maestro. – Vedete, dunque, che $\frac{13}{8}$ è una frazione per modo di dire; frazione lo è, perchè rappresenta un certo numero di ottavi; e non lo è, perchè la parte rappresentata non è *parte* dell'intero, ma è *più* dell'intero.

Invece $\frac{3}{8}$ è proprio una frazione in tutt'e due i sensi.

La frazione $\frac{3}{8}$ si dice perciò « *propria* »;

la frazione $\frac{13}{8}$ si dice invece « *impropria* ».

Il maestro invita gli alunni ad usare ora i settori rossi e fa loro disporre consecutivamente gruppi di settori, in numero diverso uno dall'altro (5, 2, 9, 11, 6, 7, 14, ecc.).

Maestro (*chiamando gli alunni uno per volta, a cominciare da quello dei* 5 *settori*). – Tu, che frazione hai ottenuto? È propria o impropria? Perchè?

(*Rivolgendosi al secondo*).

E tu? ecc. ecc.

Qualcuno risponde bene e qualcuno male; le correzioni si fanno fare ai compagni.

Finito questo esercizio il maestro fa contare tutti i settori rossi, fa scrivere alla lavagna la frazione corrispondente $\frac{16}{8}$ e fa disporre tali settori consecutivamente sul banco.

I bambini osservano subito che la frazione è impropria, dopo aver ottenuto un primo disco; poi, sollecitati a disporre consecutivamente anche i rimanenti settori rossi, s'accorgono,

con un certo stupore, che salta fuori un secondo disco intero, senza alcun avanzo.

Maestro. – Dunque con $\frac{16}{8}$ avete ottenuto 2 dischi interi; possiamo allora scrivere

$$\frac{16}{8} = 2\ ?$$

Gli alunni in coro risponderanno affermativamente e il maestro concluderà che $\frac{16}{8}$ ha solo l'apparenza di una frazione, perchè, in realtà, rappresenta due interi e che perciò si chiama *frazione apparente*.

Farà quindi notare che anche $\frac{8}{8}$ è una frazione apparente, perchè rappresenta un disco intero ed inviterà gli alunni a scoprire altre frazioni apparenti uguali a 3, a 4, a 10 interi, ecc.

Procederà poi ad altri esercizi, analoghi ai precedenti, ma astratti e con denominatori diversi, proponendo frazioni varie che gli alunni dovranno prontamente classificare, dandone chiara ragione.

Confronto tra frazioni ed operazioni su di esse

Il *confronto fra unità frazionarie* è **facile**, perchè abbastanza intuitivo. Infatti, per chi abbia bene assimilato il concetto di unità frazionaria, è immediato capire che, tanto più grande è il numero delle parti uguali in cui l'intero viene diviso, tanto più piccole risultano le parti stesse.

Naturalmente è bene ricorrere, anche per questo argomento, ad esercitazioni pratiche e astratte, individuali e collettive.

Il *confronto tra frazioni di ugual denominatore* è pure facile, per chi ha chiari i concetti basilari, invece non lo è *il confronto tra due frazioni qualsiasi*, perchè, sia che venga

effettuato riducendo le frazioni allo stesso denominatore, sia che per esso si ricorra al « criterio aritmetico » (confronto del *prodotto* del numeratore della prima per il denominatore della seconda, col *prodotto* del denominatore della prima per il numeratore della seconda, vedi aritmetica razionale), occorre sempre la proprietà invariantiva delle frazioni, che non è strettamente di programma nelle scuole elementari e che non è intuitiva, salvo in casi molto semplici.

Perciò il confronto tra due frazioni non si deve trattare nel caso generale; solo attraverso esercitazioni pratiche e nei casi più evidenti, si potrà giungere a far riconoscere se due frazioni sono uguali, pur avendo i termini diversi.

A tale scopo, per esempio, presentata agli alunni la metà di una mela, la si divida in due parti uguali e, dopo aver fatto constatare agli alunni che ognuna di queste due parti è $\frac{1}{4}$ di mela, si conducano gli stessi a concludere che $\frac{1}{2}$ di mela equivale a $\frac{2}{4}$ della medesima, per cui si può scrivere alla lavagna

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Procedendo in modo analogo, o con la stessa mela o con appositi dischetti, dividendo le varie parti in due o in tre parti uguali, si può arrivare a far osservare dagli alunni e a far scrivere le seguenti uguaglianze:

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}; \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{8}; \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}; \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}; \text{ ecc.}$$

Non è consigliabile far dedurre da questi facili esempi la proprietà invariantiva, perchè a tale astrazione

non possono arrivare, in generale, gli alunni della scuola elementare. Imparerebbero una regola puramente mnemonica, che, proprio per questo, servirebbe a ben poco.

È sufficiente che nella loro mente si formi e si fissi il concetto che due frazioni, pur avendo i termini diversi, possono essere uguali: basta che rappresentino parti uguali di una stessa grandezza (v. nota a piè di pagina).

Il concetto di uguaglianza può essere poi esteso, con procedimenti analoghi ed in analoghi casi, alle frazioni improprie.

Per quanto concerne le operazioni con le frazioni, è bene limitare l'addizione e la sottrazione alle frazioni di ugual denominatore, la moltiplicazione al caso del prodotto di una frazione per un numero intero, di facile intuizione (somma di più frazioni uguali), la divisione al caso del divisore intero, contenuto esattamente nel numeratore della frazione dividendo.

Ecco qualche esempio di operazioni, che gli alunni di una scuola elementare possono eseguire senza incontrare gravi difficoltà e che possono anche verificare attraverso esercitazioni pratiche (con dischi, con striscioline, ecc.).

$$\frac{3}{8} + \frac{4}{8}; \quad \frac{7}{12} + \frac{5}{12}; \quad \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{1}{16}; \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}; \quad \frac{5}{5} - \frac{3}{5}; \quad \frac{7}{8} - \frac{5}{8}; \quad \frac{9}{10} - \frac{7}{10}$$

$$\frac{1}{2} \times 4; \quad \frac{2}{3} \times 5; \quad \frac{1}{4} \times 8; \quad \frac{3}{5} \times 6$$

$$\frac{12}{5} : 3; \quad \frac{6}{7} : 2; \quad \frac{8}{9} : 4; \quad \frac{15}{17} : 5$$

NOTA. – Dall'« Aritmetica razionale », tra le altre, si ha la seguente definizione di frazioni uguali:

Due frazioni si dicono uguali quando operando con esse su una stessa grandezza, si ottiene lo stesso risultato.

Osservazione I. – Data la difficoltà di tutto l'argomento delle frazioni, a cui già più volte abbiamo accennato, può accadere che, malgrado le numerose e pazienti esercitazioni pratiche, malgrado gli esercizi orali e scritti, individuali e collettivi, qualche scolaro non arrivi alla completa assimilazione dei concetti e in conseguenza commetta errori anche gravi.

In questi casi il maestro deve chiamare l'alunno presso di sè, e, mettendogli a disposizione il materiale didattico adeguato, deve fargli eseguire opportune esercitazioni, in modo che lo scolaro arrivi, lui, alla scoperta dell'errore che ha commesso ed alla successiva correzione. Questa, infatti, se compiuta dal maestro direttamente e solo a parole, non è sufficiente a chiarire o a dare i concetti mancanti.

Osservazione II. – In generale sull'argomento delle frazioni i libri di testo per le scuole elementari sono poco precisi. Le manchevolezze che più comunemente si riscontrano sono;

1) la confusione dei due distinti concetti di frazione, intesa come insieme di unità frazionarie di ugual nome e come quoto di due numeri interi.

2) l'uso del difficile concetto di multiplo di un numero senza il minimo cenno di spiegazione.

3) l'uso del concetto di valore di una frazione qualsiasi, troppo astratto, del quale si può fare a meno, anche svolgendo quella parte del programma ministeriale riguardante i «pratici esercizi per la riduzione di frazioni ordinarie in decimali e viceversa».

4) la scarsità degli esercizi che, spesso, presentano salti notevoli di difficoltà.

5) l'eccessiva meccanicità nell'introdurre definizioni e regole.

Frazioni ordinarie e frazioni decimali

Ricordiamo la definizione di frazione decimale: « frazione il cui denominatore è 10 o una *potenza* di 10 », al fine di mettere in rilievo un errore grave e alquanto comune, in cui cadono talvolta libri di testo e maestri.

Costoro sostituiscono alla parola « potenza » la parola « multiplo » senza riflettere che multipli di 10 sono oltre

alle potenze 100, 1.000, ecc., anche i numeri 20, 30, 90, ecc., che *non sono* potenze di 10.

L'errore nasce, probabilmente, dalla necessità di dover modificare la definizione di frazione decimale, in modo da eliminare il termine « potenza », sconosciuto agli alunni della scuola elementare. Ma la modifica va, ovviamente, fatta, senza alterare il significato della definizione. Per raggiungere lo scopo non resta che definire la frazione decimale, come quella il cui denominatore è: « **10, o 100, o 1.000, o 10.000, ecc. ecc.** »; oppure è: « **l'unità seguita da uno o più zeri** ».

La trasformazione di un numero decimale in frazione decimale e viceversa, non presenta difficoltà particolari, nè per l'intuizione, nè per il calcolo.

Invece la riduzione di una frazione ordinaria (ossia non decimale) in decimale e la riduzione reciproca vanno limitate a casi particolari ed esaminate con ponderatezza, per vari motivi.

Tali riduzioni riguardano infatti solo i « pratici esercizi » di cui parla esplicitamente il programma ministeriale per la classe quinta elementare, essendo scopo della scuola primaria quello di preparare gli alunni ad affrontare le più comuni esigenze della vita pratica.

Una trattazione di carattere generale esula dunque dai limiti sopra accennati; inoltre richiede conoscenze teoriche (proprietà invariantiva, fattori primi, numeri decimali periodici, ecc.) che gli alunni non hanno, perchè adatte ad una capacità di astrazione, decisamente superiore alla loro età (infatti tali concetti vengono appresi nella scuola media alla fine del 1° anno e spesso all'inizio del secondo).

Per concretare le idee, vediamo quali sono i « casi pratici » a cui va limitata la trattazione.

Nella vita di ogni giorno e di tutti, sono di uso frequentissimo le espressioni:

mezzo metro, un quarto di latte, un quinto di vino,
tre quarti di litro, un chilo e mezzo, ecc., ecc.,

che l'alunno deve saper trasformare in frazione decimale di metro, di litro, di chilo, ecc., sia per calcolarne il valore, espresso praticamente in numero decimale, sia per computarne rapidamente il costo.

Si può facilmente constatare che le frazioni di uso pratico $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, ecc., ecc. sono proprio quelle che si possono (vedi nota a piè di pagina) trasformare in frazione decimale; ciò è ovvio, essendo tutto il nostro sistema di misure, ed anche di numerazione, in *base* 10.

Moltissimi libri di testo credono di risolvere elegantemente e in generale il problema della trasformazione di una frazione ordinaria in decimale e viceversa, introducendo il concetto di « valore di una frazione » come numero decimale ottenuto dalla divisione del numeratore per il denominatore.

Innanzi tutto la parola « **valore** » usata in tutti i campi con significato diverso di volta in volta, spesso, come nel caso precedente, non esprime nulla di nuovo, rispetto a ciò che è già espresso; è, come direbbero i filosofi, una forma di tautologia. Infatti, per esempio, dire che 0,5 è il valore di un mezzo, o che $\frac{1}{2}$ è il valore di 0,5 è la stessa cosa, perchè 0,5 e $\frac{1}{2}$ sono rappresentazioni diverse dello stesso numero.

Nota. – Come si studia in aritmetica razionale, non tutte le frazioni ordinarie sono trasformabili in frazioni decimali, ma solo quelle il cui denominatore, previa riduzione ai minimi termini, non contiene altri fattori primi oltre al 2 e al 5.

Giusto sarebbe dire che 0,5 e $\frac{1}{2}$ hanno lo stesso valore, o che sono equivalenti, perchè soddisfano alla condizione di uguaglianza, per cui, operando con essi su grandezze uguali, si ottengono parti uguali.

Inoltre la trasformazione di una frazione ordinaria in decimale, ottenuta attraverso la divisione del numeratore per il denominatore, implica di presentare la frazione come « quoziente esatto » fra due numeri interi qualsivogliano.

Questa concezione del tutto astratta, basata su un importante teorema di aritmetica razionale (vedi nota a piè di pagina) è troppo al di sopra delle possibilità degli alunni di scuola elementare, che non vi possono arrivare nè con l'intuizione, nè col ragionamento.

Infine la trasformazione fatta nel modo anzidetto è facile causa di un grave errore concettuale. Basta osservare l'esempio seguente per esserne persuasi.

La frazione $\frac{12}{7}$ è uguale al numero decimale periodico 1,(714285).

Ma i bambini della scuola elementare, che non conoscono i numeri periodici, scrivono:

$$\frac{12}{7} = 1,714285 \ ,$$

notazione la quale, come è noto, ha un significato ben

NOTA. — Teorema: una frazione $\frac{a}{b}$ può considerarsi il quoziente esatto tra a e b.

Basta dimostrare che, per la nota definizione di quoziente fra due numeri, $\frac{a}{b}$ è proprio quel numero che moltiplicato per il divisore b dà come prodotto il dividendo a. Infatti: $\frac{a}{b} \cdot b = \frac{a\,b}{b} = a$.

diverso dalla precedente. Infatti scrivendo 1,(714285) si rappresentano simbolicamente tutte le infinite cifre decimali a cui dà origine la divisione 12 : 7; scrivendo 1,714285, si trascurano tutte le rimanenti infinite cifre decimali, per cui risulta *falsa* l'uguaglianza:

$$\frac{12}{7} = 1{,}714285.$$

Questo errore risulta poi evidente, quando gli alunni, procedendo nella trasformazione, scrivono:

$$\frac{12}{7} = 1{,}714285 = \frac{1714285}{1.000.000}$$

facendo diventare decimale una frazione che *non* consente (vedi nota pag. 30) tale trasformazione.

Per tutti i motivi esposti bisogna dunque limitare la trattazione ai casi già citati, di uso comune nella pratica. Siccome però, anche ridotto, l'argomento presenta sensibili difficoltà, proponiamo un modo di risolvere la questione, lasciando alla capacità e all'esperienza del maestro, la scoperta di altre soluzioni.

Si parta dalle unità frazionarie più facili:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}$$

Si faccia operare con esse sul metro lineare centimetrato, attraverso una serie ben graduata di esercizi diretti e inversi, come:

$$\frac{1}{2} \text{ di m.} = 50 \text{ cm.} = \frac{50}{100} \text{ di metro}$$

$$\frac{1}{4} \text{ di m.} = 25 \text{ cm.} = \frac{25}{100} \text{ di metro}$$

$$\frac{5}{10} \text{ di m.} = 5 \text{ dm.} = \frac{1}{2} \text{ di metro}$$

$$\frac{20}{100} \text{ di m.} = 20 \text{ cm.} = \frac{1}{5} \text{ di metro, ecc. ecc.}$$

Si proceda ad analoghi esercizi orali sul litro, sul kg. e sul km.

Solo dopo molti esercizi diretti e inversi i ragazzi saranno convinti che:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000}$$

$$(1) \qquad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{250}{1000}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = \frac{200}{1000} = \frac{2}{10}$$

Quando gli alunni saranno padroni in modo certo delle relazioni (1), sarà facile procedere alla trasformazione di frazioni ordinarie a denominatore 2, 4, 5 nelle equivalenti frazioni decimali, come si vede negli esempi seguenti:

I. *Trasformare in frazione decimale la frazione* $\frac{3}{4}$.

L'alunno ha già imparato che $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, per cui facilmente capirà che:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{100} + \frac{25}{100} + \frac{25}{100} = \frac{75}{100}.$$

II. *Trasformare in frazione decimale la frazione* $\frac{7}{5}$.

Poichè l'alunno sa che $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, potrà scrivere:

$$\frac{7}{5} = \frac{1}{5} \cdot 7 = \frac{2}{10} \cdot 7 = \frac{14}{10}.$$

III. *Trasformare in frazione ordinaria la frazione decimale* $\frac{60}{100}$.

Partendo dalla nozione già acquisita che $\frac{20}{100}$ equivale a $\frac{1}{5}$, è facile ricavare che:

$$\frac{60}{100} = \frac{20}{100} + \frac{20}{100} + \frac{20}{100} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

IV. *Trasformare in frazione ordinaria la frazione decimale* $\frac{15}{10}$.

Poichè si sa che $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, è facile dedurre che:

$$\frac{15}{10} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Le unità frazionarie $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{25}$ sono, in pratica, me-

no usate. Tuttavia, fatto osservare sul metro graduato che:

$$\frac{1}{20} \text{ di metro} = \text{cm. } 5 = \frac{5}{100} \text{ di metro,}$$

e che

$$\frac{1}{25} \text{ di metro} = \text{cm. } 4 = \frac{4}{100} \text{ di metro,}$$

si potrà procedere alla trasformazione di frazioni ordinarie a denominatore 20 o 25 nelle equivalenti frazioni decimali e viceversa, come nei casi considerati prima.

Osservazione I. – La tendenza molto diffusa di trasformare una frazione ordinaria in decimale attraverso la divisione del numeratore per il denominatore, ci fa dubitare che il modo da noi proposto possa suscitare qualche incertezza e per la limitatezza dei casi visti e per la apparente laboriosità.

Chi decisamente vuole rimanere fedele alla propria consuetudine, ntroduca pure il concetto di frazione uguale al quoto tra numeratore e denominatore, ma invece di darlo come definizione, lo faccia ricavare da numerosi e ripetuti esercizi di questo genere:

$$\frac{3}{4} \text{ di metro} = \frac{3}{4} \text{ di } 100 \text{ cm.} = \text{cm. } 100 : 4 \times 3 = \text{cm. } 25 \times 3 =$$
$$= \text{cm. } 75 = \frac{75}{100} \text{ di metro.}$$

D'altra parte dividendo m. 3 in 4 parti uguali si ottiene:

$$m.\ 3 : 4 = \text{m. } 0{,}75 = \frac{75}{100} \text{ di metro}$$

cioè si ottiene lo stesso risultato ottenuto prima.

Da questo esempio e da tanti altri analoghi il maestro condurrà gli scolari a dedurre che veramente una frazione è uguale al quoziente esatto tra numeratore e denominatore.

Ci permettiamo tuttavia di far rilevare che se, operando in quest'ultimo modo, si guadagna in rapidità di calcolo, si possono anche generare cause di errori, in quanto che la limitatezza dei casi di trasformazione possibile non è più evidente, nè si può dare la regola generale che permetta allo scolaro di discriminare le frazioni trasformabili. Gli errori a cui allu-

diamo e che altrove abbiamo già illustrato, si radicano con tanta tenacità nella mente degli alunni, che anche nelle scuole secondarie, inferiori e superiori, non si riesce più ad estirparli, malgrado la completa trattazione teorica della questione.

Osservazione II. - C'è un'altra via per risolvere la questione, quella basata sulla proprietà invariantiva delle frazioni, usata da qualche libro di testo per scuole elementari.

Così per esempio: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100}$

e viceversa: $\frac{120}{100} = \frac{12 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{12}{10} = \frac{6 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{5}$.

A parte il fatto che la proprietà invariantiva, come già si è detto, non è specificatamente di programma nelle scuole elementari, facciamo notare che per effettuare le trasformazioni viste, l'alunno deve conoscere i criteri di divisibilità, non solo, ma deve intuire quale sia il fattore opportuno per cui vanno moltiplicati o divisi i termini della frazione data.

NOTA STORICA.

I numeri frazionari erano conosciuti anche nella remota antichità. Nel Papiro Rhind (2000 — 1600 *a. C.*) *compaiono frazioni, però solo quelle con numeratore uguale a* 1; *esse vi sono simbolicamente rappresentate con l'apposizione di un punto sopra il segno del denominatore.*

I Greci trattarono invece anche frazioni con numeratore diverso da 1: *essi le rappresentarono, in generale, scrivendo alla destra del simbolo del numeratore, due volte (con apici) il simbolo del denominatore. Le denominazioni e i segni oggi usati per i numeri frazionari si trovano in Leonardo Pisano (XIII secolo). Erano detti «rupti» o «fracti» e il tratto orizzontale posto tra numeratore e denominatore (deformazione della iniziale f di «fractus») si chiamava «virgula».*

Le denominazioni di «numeratore» e «denominatore» sono posteriori, circa del 1400.

La distinzione tra frazioni proprie e improprie è del 1700.

QUESTIONE DIDATTICA SULLE UNITÀ DECIMALI E SUI NUMERI DECIMALI

Il concetto di « *unità decimale* » è di immediata acquisizione da parte degli alunni, i quali hanno già famigliarità con quello più generale di unità frazionaria.

Basta far osservare che quando l'intero viene diviso in 10, in 100, in 1.000, in ecc., parti uguali, le unità frazionarie corrispondenti: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ecc. ..., si chiamano « unità decimali » e si leggono, secondo la nota regola: un decimo, un centesimo, un millesimo, ecc. ....

Invece il concetto di « numero decimale » e la relativa scrittura presentano una certa difficoltà.

Data l'importanza dell'argomento, soprattutto in campo pratico, diamo un esempio di lezione introduttiva.

Il maestro distribuisce ad ogni scolaro 22 dischetti uguali, di cartoncino, e 14 settori, ricavati dalla divisione in 10 parti uguali di altri dischetti identici ai precedenti.

Per la preparazione del materiale didattico occorrente, il maestro può servirsi dell'opera degli stessi scolari, ai quali, durante le ore di lavoro, avrà fatto ritagliare dischi e settori, su modello da lui precedentemente preparato. (v. nota).

Nota. – La divisione di un cerchio in 10 parti uguali si può effettuare per mezzo del rapportatore, segnando successivamente angoli di 36°, oppure col compasso, costruendo la sezione aurea del raggio (lato del decagono regolare).

Si preferisce, per questa lezione, ricorrere di nuovo ai dischi e ai settori, sia perchè già usati per l'introduzione dei concetti di decina e di unità frazionaria, sia perchè è più evidente la differenziazione tra l'intero e la parte aliquota. Però il maestro può usare altro materiale, come, per esempio, strisce rettangolari di cartoncino, divisibili in 10 quadratini uguali.

I bambini, invitati dal maestro, formano *una* colonnetta di 10 dischi (*decina*) e dispongono consecutivamente uno all'altro 10 settori, in modo da formare un disco intero.

Sul banco hanno quindi: *la decina, il disco formato dai 10 settori* e, da una parte, il resto del materiale.

Maestro (*dopo aver fatto osservare che ogni settore è* $\frac{1}{10}$ *di disco*)

Quanti sono i decimi che compongono il disco?

Alunni. – Dieci.

Maestro. – Quanti sono i dischi che compongono la colonnetta?

Alunni. – Dieci.

Maestro. – Ma la colonnetta allora che cosa rappresenta?

Alunni. – Una decina.

Maestro. – Il disco invece rappresenta l'unità.
Allora, come la decina è composta di 10 unità, l'unità è composta ...

Bambini. – Da 10 decimi.

Il maestro scrive alla lavagna:

1 Decina = 10 Unità
1 Unità = 10 Decimi.

Poi invita gli scolari a formare con i dischi rimanenti tutte le possibili decine.

Maestro (*rivolgendosi a uno scolaro*). – Tu che cosa hai sul banco?

Scolaro. – Due colonnine, tre dischi e mi avanzano quattro pezzetti.

Maestro. – Quante decine? Quante unità? Quanti decimi?

Scolaro. – Due decine, tre unità e quattro decimi.

Il maestro invita quindi un altro alunno a scrivere alla la-

vagna il numero degli oggetti che ha sul banco. Probabilmente occorrerà un po' di aiuto per ottenere che scriva:

2 Decine + 3 unità + 4 decimi.

Maestro (*rivolto alla classe*). – Che scrittura lunga e complicata! Non potremmo semplificarla? Ricordate le caselline delle decine e delle unità?

Può darsi che solo qualcuno ricordi; senz'altro, però, sotto la sua guida, il maestro riuscirà a far rammentare a tutti (vedi lezione sulla scrittura dei numeri interi, pag. 7) che le decine erano state racchiuse in una casella azzurra e le unità in una rossa, così:

Maestro. – Una decina è formata da 10 unità e la casellina rossa delle unità è a destra di quella delle decine. Ma una unità è formata da 10 decimi, perciò possiamo disegnare, alla destra della casellina rossa delle unità, una casellina gialla per i decimi, così:

D.	U.	d.
azzurro	*rosso*	*giallo*

All'invito di rappresentare ora il numero degli oggetti che ognuno ha davanti sul banco, molti alzano la mano e uno viene alla lavagna a scrivere in ogni casella il numero corrispondente, così:

D.	U.	d.
2	3	4
azzurro	*rosso*	*giallo*

Maestro. – E se cancellassimo ora il contorno dei quadretti? Proviamo. (*Cancella e rimane 234*).
È proprio questo il numero degli oggetti che avete sul banco?

Bambini (*in coro*). – No!

Maestro. – Dobbiamo allora tenere il contorno delle caselline? Altrimenti, cosa possiamo fare per semplificare la scrittura?

La curiosità e l'interesse si fanno vivissimi; possono venir fuori proposte varie, anche bizzarre. Il maestro le accolga e le

discuta; ogni osservazione è un passo avanti verso il maturarsi della soluzione del problema.

Qualche bambino, o il maestro stesso, può proporre di cancellare i contorni azzurri e rossi, lasciando solo quello giallo dei decimi; in questo modo il numero conserva il giusto significato.

MAESTRO. – Perchè dobbiamo trattare in modo diverso la casellina dei decimi da quella delle unità e delle decine?

I bambini resteranno perplessi; ma il maestro potrà facilmente convincerli che una differenziazione è indispensabile, perchè nelle caselline azzurre e rosse si scrivono *numeri di oggetti interi* (dischi), mentre in quella gialla si scrive il *numero di parti di essi*; i bambini capiscono chiaramente che non si possono confondere le parti con gli interi.

Spiegata così l'indispensabilità della differenziazione, il maestro può proporre la tradizionale separazione fra unità intere e unità decimali mediante la virgola.

Scriverà alla lavagna:

D.	U.	d.
2	3 ,	4
azzurro	*rosso*	*giallo*

e, dopo aver cancellato i contorni delle 3 caselle, farà notare che:

D. U. d.
2 3 , 4

esprime, nella massima semplicità di scrittura, senza dar luogo ad alcuna confusione, il numero dei dischi e dei loro decimi, già scritto prima esplicitamente sotto la forma:

2 decine + 3 unità + 4 decimi.

Il maestro procede poi ad altri esercizi di carattere individuale; distribuisce ad ogni bambino altri dischi e altri settori, in numero diverso e facendo di nuovo raggruppare gli stessi in decine e unità, fa scrivere a ciascuno sul quaderno, nei modi già visti, il numero corrispondente.

La correzione degli errori è molto importante, perchè attraverso ad essa, fatta singolarmente, il maestro potrà colmare le lacune e chiarire i concetti.

A questo punto è facile introdurre la scrittura con la virgola dell'unità decimale del 1º ordine (0,1).

Presentando alla classe un solo settore, il maestro chiede chi sa scrivere alla lavagna il numero che lo rappresenta. Tutti alzano la mano e uno di essi scriverà:

$$\frac{1}{10}.$$

MAESTRO. – Va bene; ma come potremmo scriverlo con la virgola?

La perplessità è generale; allora il maestro disegna sulla lavagna la casellina delle unità e quella dei decimi; fa notare la mancanza di un disco intero da rappresentare ed invita gli alunni a significare tale mancanza nella casellina corrispondente. Qualche alunno arriverà senz'altro a scrivere:

U.	d.
0	
rosso ,	*giallo*

MAESTRO. – E nell'altra casellina cosa si scrive?

Il bambino, senza sforzo, scriverà:

U.	d.
0	1
rosso ,	*giallo*

MAESTRO. – E se cancelli il contorno?

Il bambino eseguirà:

0 , 1

MAESTRO. – Abbiamo dunque due modi diversi di rappresentare la decima parte dell'unità:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1.$$

In seguito si potrà procedere ad esercitare la classe, scrivendo sulla lavagna vari numeri decimali del tipo: 10,5; 32,8; 2,3; 215,6; 108,2; 0,5; 0,8; 200,7; ecc.

Dapprima si farà leggere il numero cifra per cifra, attribuendo ad ognuna il proprio significato:

esempio:

1 decina + 0 unità + 5 decimi

poi si daranno le due regole di lettura:

esempio:

1) dieci virgola cinque

2) dieci e cinque decimi.

Infine si faranno rileggere tutti i numeri secondo le suddette regole.

I concetti, i simboli e il meccanismo della scrittura e della lettura verranno fissati sempre meglio con opportuni esercizi di trascrizione e di dettatura, dei tipi seguenti, graduati:

1). Scrittura di numeri decimali dettati dal maestro secondo le due regole. Esempi:

Maestro (detta) Uno virgola sei
Tredici e sette decimi

Bambini (scrivono) 1,6; 13,7.

Ovviamente si detta un numero per volta.

2). Trascrizione sul quaderno, usando la virgola, di numeri decimali scritti alla lavagna in forma polinomiale.

Lavagna	*Quaderno*
0 unità + 4 decimi	0,4
2 centin. + 0 decine + 5 unità + 3 decimi =	205,3
	ecc.

3). Trascrizione in forma decimale di numeri scritti alla lavagna in forma polinomiale non ordinata.

Lavagna	*Quaderno*
6 decimi + 3 decine + 2 unità	32,6
	ecc.

4). Scrittura in forma decimale di numeri dettati in forma polinomiale.

5) Trasformazione di un numero decimale in numero intero di decimi.

Esempio: 8,3 = 8 unità + 3 decimi =
= 80 decimi + 3 decimi =
= 83 decimi ecc. ecc.

6). Trasformazione di gruppi di decimi (superiori a 9) in numero decimale.

Esempio: 12 decimi = 10 decimi + 2 decimi =
= 1 unità + 2 decimi =
= 1,2

20 decimi = 10 decimi + 10 decimi =
= 1 + 1 = 2

50 decimi = (10 decimi) × 5 volte =
= 1 unità × 5 volte =
= 5 unità

100 decimi = 10 decimi × 10 volte =
= 1 unità × 10 volte =
= 10 unità

102 decimi = 100 decimi + 2 decimi =
= 10 unità + 2 decimi =
= 10,2

7). Numerazione scritta e orale, progressiva e regressiva per 1 decimo e per più decimi.

Esempi:	Numerare per	0,1	da	13,5	a	20,6
	» »	0,1	da	20,4	a	17,2
	» »	0,3	da	0,4	a	6,8
	» »	0,2	da	20,7	a	15,5

Quando i bambini saranno sicuri sui numeri decimali limitati ai decimi, il maestro potrà introdurre la scrittura e la lettura dei numeri estesi ai centesimi.

Il maestro proporrà il problema di dividere un decimo (vedi nota) in dieci parti uguali e di dire quale parte dell'intero si viene ad ottenere. Collettivamente si arriverà a stabilire che la decima parte di un decimo è $\frac{1}{100}$ dell'unità intera e verrà scritto sulla lavagna:

1 unità = 10 decimi
1 decimo = 10 centesimi

Proposta allora una nuova casellina per i centesimi e scritte nelle varie caselline cifre a caso, per esempio:

D	U	d	c
4	8	2	6

si inviteranno i bambini a trascrivere il numero senza contorno, sfruttando la virgola; ognuno scriverà:

48,26

Nota. – Per l'introduzione del centesimo non ci si può più servire del disco, essendo materialmente impossibile dividere questo in 100 parti uguali; è consigliabile introdurre prima il *metro*, (unità di misura di lunghezza).

Con un metro a nastro (intero) e con un altro tagliato parte in pezzetti di 1 cm. e parte in pezzetti di 1 dm. gli alunni possono veder realizzato in pratica $\frac{1}{100}$ di m. e $\frac{1}{10}$ di $\frac{1}{10}$ di m.; si possono eseguire così tutti gli esercizi sui centesimi analoghi a quelli sui decimi, integrandoli e concretandoli con le varie misurazioni effettuabili.

I successivi esercizi di trascrizione, di lettura, di dettatura e di numerazione saranno analoghi a quelli già visti per i decimi. Però si incontra una difficoltà nuova: l'assenza, nel numero decimale, della cifra dei decimi.

Il maestro l'affronti quando gli scolari hanno già acquisito una discreta sicurezza nella scrittura dei numeri con due cifre decimali significative; può procedere in questo modo:

In un esercizio provi a dettare un numero di questo tipo: « dodici e tre centesimi »; veda che cosa combinano gli alunni e faccia riprodurre alla lavagna i vari tipi di scrittura ottenuti (qualcuno può aver scritto 12,3, qualcun altro 12,...3 e ancora 12,30 e forse anche 12,03 ecc.).

Inviti quindi la classe a giudicare quale, fra le varie scritture, è la giusta e, per facilitare il giudizio, disegni alla lavagna le solite caselline, facendo poi collocare in esse le cifre del numero dettato. Tutti si convinceranno facilmente della necessità di scrivere lo zero dentro la casella vuota; infatti, solamente così, cancellando il contorno delle caselle, le cifre del numero *non* cambiano il loro significato posizionale.

Come conseguenza quasi immediata si ha la scrittura di $\frac{1}{100}$ sotto forma del numero decimale 0,01.

L'introduzione delle unità decimali di ordine superiore al centesimo si fa per analogia, non presentando essa ulteriori difficoltà.

Osservazione. – La scrittura dei numeri decimali, fino ai centesimi compresi, è parte specifica del programma di 3ª elementare. I numeri con unità decimali di ordine superiore sono riservati alle classi quarta e quinta.

Le questioni relative allo spostamento della virgola in un numero decimale sono, non ostante le apparenze,

concettualmente piuttosto complesse, per poterne dare ai bambini una ragione semplice e intuitiva. Le spiegazioni infatti possono essere date, o considerando il numero decimale come somma di unità dei vari ordini (interi e decimali), o trasformandolo in frazione decimale.

Ma nel primo caso, dovendo moltiplicare o dividere una somma per 10 (o per una sua potenza), ci si trova di fronte all'applicazione della proprietà distributiva, di intuizione piuttosto difficile.

Nel secondo caso, abbastanza facile, ci si trova di fronte al fatto che, mentre la questione dello spostamento della virgola va trattata in 3ª classe (per la trasformazione di misure di grandezze in unità multiple o sottomultiple della data), le operazioni con le frazioni sono programma di quinta elementare.

Per le ragioni suesposte l'argomento va trattato come caso particolare di moltiplicazione e divisione per 10 e per 100 ecc., dopo aver insegnato le stesse operazioni con numeri interi e decimali diversi da 10 e dalle sue potenze.

NOTA STORICA.

Le regole di numerazione scritta nel sistema decimale, comprendenti i numeri decimali, sono dovute a S. Stevin (La Disme-Leyde 1585 – Oeuvres mathe.). Stevin non faceva uso della virgola, ma poneva a destra della cifra delle unità, dei decimi, dei centesimi, ecc., rispettivamente le cifre 0, 1, 2, ecc., chiuse in un circolino per rappresentare i relativi ordini.

La rappresentazione dei numeri decimali nella forma odierna è dovuta a J. Napier (1617).

Egli infatti scriveva;

1 9 9 3 , 2 7 3 oppure 1 9 9 3 , $2^{o}\ 7^{oo}\ 3^{ooo}$.

L'uso della virgola però non si generalizzò in Italia e in Francia che verso la fine del XVIII sec. con l'introduzione del sistema metrico decimale.

QUESTIONI DIDATTICHE SULLE OPERAZIONI NELLE CINQUE CLASSI ELEMENTARI

L'importanza dell'insegnamento delle quattro operazioni è tanto ovvia, che non ha bisogno di illustrazione. Ma tale insegnamento è faticoso, perchè si basa su regole di carattere prevalentemente meccanico; ogni regola di calcolo risulta, infatti, dall'applicazione combinata di tutte le proprietà formali relative, che i ragazzi di una scuola elementare non possono apprendere.

Per queste ragioni è necessario procedere con molta lentezza: non insegnare una regola nuova, se non si è più che sicuri dell'apprendimento delle precedenti da parte di tutti, non superare i limiti fissati dal programma ministeriale, steso da docenti di grande competenza ed esperienza; sfruttare il più possibile il calcolo orale, da effettuarsi quotidianamente, anche per un breve intervallo di tempo; esigere sempre, nel calcolo scritto, il massimo ordine.

Prima di procedere alla trattazione particolareggiata dell'argomento, vogliamo richiamare l'attenzione su due errori, che facilmente gli scolari commettono e che gli insegnanti non correggono, errori gravi, che restano tenacemente radicati, tanto da renderne poi assai difficile l'eliminazione.

Tali errori, probabilmente, hanno la loro origine nel-

l'abitudine di fare eseguire oralmente operazioni successive, in questo modo:

Domanda. Cinque + tre?
Risposta. Otto
D. Per quattro?
R. Trentadue
D. Meno due?
R. Trenta
D. Diviso tre?
R. Dieci

Queste successive operazioni sono spesso tradotte per iscritto, secondo le due seguenti notazioni:

1) $5 + 3 = 8 \times 4 = 32 - 2 = 30 : 3 = 10$
2) $5 + 3 \times 4 - 2 : 3 = 10$

Le notazioni 1) e 2) *sono gravemente errate.*
La 1) lo è in modo evidente, perchè non è che una suc-

NOTA. – In false uguaglianze cadono frequentemente gli alunni anche nei casi seguenti:

a) nel calcolare l'area della superficie di figure piane e solide, quando si debba dividere per 2: essi infatti usano scrivere come nell'esempio che segue, riferito a un triangolo di base cm. 10 e altezza cm. 6:

$$\text{cm}^2\ 10 \times 6 = \text{cm}^2\ 60 : 2 = \text{cm}^2\ 30.$$

b) nel calcolare volumi di solidi, quando occorra dividere per 3: le false uguaglianze che scrivono sono analoghe alla precedente.

c) nel calcolare il valore della frazione di una grandezza, come nell'esempio seguente:

$$\frac{4}{5} \text{ di m. } 75 = \text{m. } 75 : 5 = \text{m. } 15 \times 4 = \text{m. } 60.$$

Le false uguaglianze si eliminano eseguendo le operazioni una per volta, separatamente, così:

$$\text{m. } 75 : 5 = \text{m. } 15 \qquad \frac{1}{5} \text{ di m. } 75$$

$$\text{m. } 15 \times 4 = \text{m. } 60 \qquad \frac{4}{5} \text{ di m. } 75.$$

cessione di false uguaglianze; nientemeno per essa risulta che:

$$8 = 32 = 30 = 10\ !$$

Gli errori della 2), invece, non sono per nulla evidenti agli occhi di un profano (da qui la difficoltà di correggerli in seguito). Per capirli, ricordiamo che, dovendo moltiplicare (o dividere) una somma (o una differenza) per un numero, si possono moltiplicare (o dividere) per esso tutti i singoli termini; è la proprietà distributiva. Per esprimere ciò in matematica si è convenuto di chiudere tra parentesi la somma (o la differenza). Ora, se le parentesi mancano, significa che il numero moltiplica (o divide) solo un termine, quello che lo precede immediatamente.

Nella notazione 2), quindi, il « 4 » non moltiplica la somma di $5 + 3 = 8$, ma solamente il « 3 »; così l'ultimo numero « 3 » non divide il risultato delle operazioni precedenti, ma solo il « 2 ».

Il risultato della 2), scritta in quel modo è:

$$5 + 12 - \frac{2}{3} = 17 - \frac{2}{3} = \frac{49}{3}$$

La notazione esatta corrispondente all'esercizio orale a cui la 2) si riferisce è:

(3) $[(5 + 3) \times 4 - 2] : 3$ da cui si ricava infatti:
$[8 \times 4 - 2] : 3 = [32 - 2] : 3 = 30 : 3 = 10.$

La notazione (3) però non può essere insegnata in una scuola elementare, per cui, volendo evitare errori, non resta che tralasciare decisamente il calcolo scritto del

---

Nota. – Consigliamo i maestri di introdurre per tempo nell'insegnamento la terminologia appropriata relativa alle quattro operazioni (addendi, minuendo, sottraendo, fattori, ecc.).

valore di espressioni numeriche, contenenti moltiplicazioni e divisioni mescolate con somme e sottrazioni; si possono invece trattare, senza pericolo di incorrere in errore, espressioni contenenti o solamente somme e sottrazioni, o solamente moltiplicazioni e divisioni.

ADDIZIONE

Addizione. - Classe I elementare

In questa classe l'addizione si svolge soprattutto oralmente. Le esercitazioni scritte servono solo a dare ai bambini la padronanza delle cifre e dei simboli necessari.

Il maestro introdurrà l'operazione, facendo un unico gruppo di due gruppi di oggetti della stessa specie e farà contare tutti gli oggetti del gruppo ottenuto.

Per esempio, fatti raggruppare due mucchietti rispettivamente di 5 e di 3 bottoni, dirà che gli 8 bottoni ottenuti ne sono la *somma*.

Eseguiti molti esercizi di questo tipo, variati nel numero e nella qualità degli oggetti, tendenti a dare e a chiarire sempre meglio il concetto di somma, il maestro potrà passare alla rappresentazione simbolica dell'operazione.

Procederà quindi ad una prima astrazione, abbandonando il materiale didattico e sfruttando solo le dita della mano. Farà notare che per avere, ad esempio, la somma di 5 dita e di 4 dita, è inutile contarle tutte, perchè basta contare dopo il numero 5 delle prime, quattro unità, quante sono cioè le dita da aggiungere.

Naturalmente occorrono molti esercizi, soprattutto orali, durante i quali il maestro farà notare che non occorre rappresentare con le dita il primo addendo, bastando

rappresentare il secondo. Così, per esempio, dovendo calcolare $3 + 6$ il bambino dirà « tre » e, presentando 6 dita, conterà su di esse ordinatamente « quattro, cinque, ecc. » fino a « nove » che è la somma cercata.

È indispensabile che i bambini giungano a questo grado di astrazione, per poter agevolmerte calcolare somme superiori a 10.

Una volta acquisita la sufficiente padronanza del nuovo modo di concepire la somma, il maestro abolirà ogni sussidio materiale (anche le dita) e procederà ad esercizi puramente astratti.

Il passaggio può essere facilitato da giochi opportuni, indicatissimo quello con due o tre dadi.

Molto utili per il raggiungimento della necessaria disinvoltura nel calcolo, sono gli esercizi di composizione e scomposizione di un numero effettuati prima attraverso giochi, poi in modo astratto.

Esempi di esercizi:

1) Trovare, oralmente, le coppie di addendi che hanno per somma un numero assegnato; così, assegnato il numero 8, i bambini devono saper dire che:

   $8 = 4 + 4$; $8 = 5 + 3$; $8 = 6 + 2$; $8 = 7 + 1$; $8 = 0 + 8$

2) Esercizi analoghi ma scritti per la scomposizione di un numero in 3 addendi.

3) Esercizi (scritti e orali) di questo tipo, ove occorre calcolare il numero da scrivere al posto dei puntini:

   $6 + ... = 8$; $5 + ... = 11$
   $... + 3 = 10$; $... + 7 = 12$ ecc., ecc.

4) Dovendo eseguire una addizione il cui risultato superi la decina, far scomporre uno o più addendi in modo da facilitare il calcolo; così per esempio, invece di far eseguire direttamente

$$7 + 12 = 19$$

si può far procedere così:

$$7 + 12 = 7 + 3 + 9 = 10 + 9 = 19$$

oppure così:

$$7 + 12 = 7 + 10 + 2 = 17 + 2 = 19$$

ESEMPIO DI GIOCO: TOMBOLA.

Materiale didattico occorrente: tante cartelle quanti sono i bambini, divise in 4 caselle uguali, nelle quali figurano 4 numeri diversi, la cui somma complessiva non superi 20, come nella figura; tanti dischetti di cartoncino, di 3 colori diversi, quanti bastano per poterne dare 4 per ogni colore a ciascun bambino.

1	3
9	5

Distribuito il materiale, il maestro scrive sulla lavagna un numero che non superi 20, per esempio 15 e lo scrive col gessetto rosso; i bambini devono coprire coi dischetti rossi quei numeri della loro cartella che dànno per somma 15.

Poi il maestro scrive alla lavagna un altro numero col gesso bianco, per esempio 9 e i bambini devono coprire coi dischi bianchi quei numeri, ancora scoperti della loro cartella, la cui somma è 9. E così per un altro colore.

Vince chi per primo riesce, senza fare errori, a coprire tutti i numeri della sua cartella (il che può avvenire anche subito dopo la 1ª estrazione).

Evidentemente, se il numero scritto dal maestro alla lavagna figura sulla cartella, il bambino lo copre direttamente, senza fare alcuna somma.

Il gioco interessa moltissimo; il maestro lo sfrutti il più possibile, girando tra i banchi a far notare e a far correggere gli errori, stimolando l'amor proprio dei più lenti, col proporre numeri che fanno al caso loro.

Nota. – L'applicazione dell'addizione alla risoluzione (orale) dei problemi verrà trattata nell'apposito capitolo (vedi pag. 163).

Addizione. - Classe II elementare

In questa classe, per quanto riguarda il calcolo orale l'addizione si estende solo fino al 50; non presenta perciò difficoltà nuove e come nella classe precedente serviranno moltissimo gli esercizi di composizione e di scomposizione, con particolare riguardo a quelli che facilitano il calcolo mentale.

Esempio: dovendo calcolare oralmente la somma:

$$25 + 17$$

si insegnerà che la via più comoda è la seguente:

$$25 + 10 + 5 + 2 = 42.$$

Invece proprio in 2ª classe si insegnano per la 1º volta le regole per eseguire l'addizione scritta, in colonna (entro il 100). Le regole riguardano l'incolonnamento e il riporto.

Naturalmente si procederà per gradi, facendo eseguire dapprima solo le addizioni senza riporto, per le quali c'è solo il problema dell'incolonnamento. Ammesso che la numerazione sia stata bene assimilata (vedi nota pag. 9), basterà mettere bene in evidenza le colonne delle decine e delle unità e far scrivere entro ciascuna le cifre corrispondenti dei vari addendi. L'addizione risulta molto facile, riducendosi a due somme inferiori a 10.

Esempio: per eseguire 34 + 25 = 59 l'operazione si disporrà così:

D	U	
3 2	4 5	+ =
5	9	

In un secondo tempo si provvederà a far eseguire le addizioni col riporto. Facciamo notare che concettualmente l'operazione non è difficile, ma molti alunni sbagliano frequentemente, perchè data la tendenza alla distrazione e alla sventatezza, propria dell'età, il riporto viene dimenticato. Tale riporto è un numero di decine, perciò noi consigliamo di farlo scrivere in alto o in basso nella colonna delle decine. L'operazione risulterà disposta così:

dovendo eseguire $14 + 23 + 35$, scriveremo:

	D	U	
	1	4	+
	2	3	+
	3	5	=
riporto	1		
	7	2	

La divisione in colonne è facilitata dalla particolare rigatura dei quaderni di 2ª classe; quando però gli alunni sono abbastanza sicuri, può essere abbandonata.

Addizione. - Classe III elementare

In questa classe l'unica novità è rappresentata dalla somma di numeri decimali (fino ai centesimi). Ma concettualmente non c'è alcuna difficoltà nuova, se i bambini sono ben sicuri sul significato delle cifre decimali (vedi pag. 37 e segg.).

Infatti basta aggiungere alle colonne delle unità intere, quelle delle unità decimali dei vari ordini e procedere come per i numeri interi.

Esempio:

dovendo eseguire l'addizione 12,84 + 7,03 + 308,72 l'operazione si disporrà così:

	C	D	U		d	c	
		1	2	,	8	4	+
			7	,	0	3	+
	3	0	8	,	7	2	=
riporto		1	1				
	3	2	8	,	5	9	

Qualora in uno o più addendi manchi la cifra dei centesimi o anche quella dei decimi, è opportuno (per analogia con ciò che si farà di necessità in altre operazioni) far pareggiare il numero delle cifre decimali, prima di eseguire la somma.

Esempio:

per calcolare 8 + 0,03 + 35,2 l'operazione viene disposta così:

	D	U		d	c	
		8	,	0	0	+
		0	,	0	3	+
	3	5	,	2	0	=
riporto	1					
	4	3	,	2	3	

Naturalmente, dopo un adeguato numero di esercizi, raggiunta la sufficiente sicurezza da parte di tutti, si potranno senza inconvenienti tralasciare le sbarre verticali di separazione tra le colonne delle varie unità; la stessa considerazione vale per la trascrizione del riporto.

Addizione. - Classe IV e V elementare

In queste classi l'addizione si estende a tutti gli ordini di uso pratico, sia interi che decimali, ma non presenta difficoltà nuove. Facciamo notare che le addizioni di uso più frequente nella vita pratica, sono quelle con parecchi addendi: note della spesa, giornaliere o mensili, fatture, ecc.; perciò il maestro provveda ad esercitarvi adeguatamente i propri allievi.

LA SOTTRAZIONE

La sottrazione in classe I

Due concetti fondamentali conducono all'operazione di sottrazione: quello di *resto* e quello di *differenza*. Il « *resto* » è il numero inerente al gruppo che si ottiene togliendo dal gruppo dato alcuni suoi elementi; la « *differenza* » è il numero di elementi che vanno aggiunti a un gruppo, per ottenerne uno di data numerosità maggiore (vedi nota a piè di pagina).

La rappresentazione simbolica, però, è la stessa per entrambi i casi,

$$a - b$$

mentre il procedimento mentale del calcolo è diverso, eseguendosi nel primo una vera e propria sottrazione, nel 2° una addizione. Così per esempio alla domanda: « Che cosa rimane togliendo da 10 sette? » si risponde « 3 »

NOTA. – Dati due numeri a e b, se $a > b$ il numero c per il quale ha luogo l'uguaglianza $a = c + b$ si dice « *differenza fra a e* b » o « *resto della sottrazione di* b *da a* » e si designa con $a - b$.

Confrontare con « Enciclopedia delle matematiche elementari » Volume I - parte I, pag. 114 - Hoepli - Milano.

eseguendo mentalmente una sottrazione; invece alla domanda: « Che cosa manca a 7 per avere 10 » si risponde ancora « 3 », eseguendo mentalmente una somma.

Per queste considerazioni, invece di trattare la questione nell'apposito capitolo dei problemi, l'affrontiamo subito, consigliando il maestro di abituare gli scolari, fin da principio, ad associare all'operazione di sottrazione l'uno e l'altro concetto, l'uno e l'altro procedimento di calcolo. Le difficoltà non sono poche. Occorrono pazienza, tempo e soprattutto grande discernimento nel graduare e variare gli esercizi. Può darsi che qualche alunno, pur non essendo privo di capacità, non arrivi alla sicura padronanza dell'operazione, durante l'anno scolastico. Il maestro non perda la fiducia per questo; basterà qualche mese, per ritrovare in seconda lo stesso bambino, più capace e più pronto.

La rappresentazione scritta della sottrazione, come si deduce ovviamente da quanto abbiamo detto prima, è molto importante e ad essa il maestro deve ricorrere molto più frequentemente che per l'addizione. È, però, bene evitare di mescolare in una sola espressione le due operazioni.

Il concetto di « resto » è più intuitivo di quello di « differenza »; perciò il maestro cominci da esso, facendo operare i bambini su gruppi di oggetti o, più semplicemente, sulle dita.

Presentando, per esempio, un mucchietto di 8 bottoni, il maestro chieda quanti ne restano togliendone 3.

I bambini possono arrivare al risultato in due modi: separando nettamente i tre bottoni e contando i rimanenti, oppure togliendoli uno per volta, contando regressivamente da 8 a 5.

Ottenuto il risultato il maestro scrive alla lavagna:

8 meno 3 = 5

poi fa sostituire alla parola *meno* il simbolo corrispondente, così:

$$8 - 3 = 5$$

Gli esercizi analoghi devono essere molto numerosi e variati; ogni volta il maestro procederà a controllare che il risultato non sia detto o scritto a caso.

Il concetto di « **differenza** » necessita di una lezione introduttiva adeguata, spesso omessa dagli insegnanti, col risultato che negli esercizi corrispondenti, non distinti dagli altri, i bambini fanno confusione (vedi nota a piè di pagina).

Proponiamo perciò uno schema di lezione che possa servire allo scopo.

Il maestro deve avere a disposizione alcune scatolette di cartone, chiuse, contenenti bottoni o pennini (o altri oggetti) in numero minore di 10; di tali scatolette due contengono lo stesso numero di oggetti.

Il maestro chiami presso di sè, di fronte a tutti i compagni, due bambini e consegni a ciascuno una delle scatolette racchiudenti lo stesso numero di bottoni (cosa che i bambini non sanno).

MAESTRO. – Sapreste dirmi, senza aprire la scatola, se avete lo stesso numero di bottoni?

I due scolaretti e tutti gli altri interpellati restano assai perplessi.

MAESTRO (*sfruttando l'opportuno momento psicologico, così creato*). – Vi aiuterò io. Fate un buchetto nel coperchio, tirate fuori un bottone ciascuno e mettetevelo davanti sulla cattedra.

(*I bambini eseguiscono nel silenzio generale*).

NOTA. – Per conferma, si provi, per esempio, a domandare a un bambino (e non solo di prima classe!): « Quanto manca a 6 per avere 10? »

La risposta « 4 » sarà pronta. Ma il bambino, richiesto di spiegare quale operazione ha eseguito per ottenere il risultato, risponderà (99 volte su 100) che ha fatto una addizione.

– Tiratene fuori un altro e collocatelo vicino ai primi; poi un altro ancora; poi ancora; avanti così, sempre *contemporaneamente*.

I bambini procedono, finchè a un certo punto frugheranno invano col ditino. I bottoni sono finiti.

MAESTRO. – Ne avevate lo stesso numero?
BAMBINI. – Sì.

Anche tutti gli altri acconsentono divertiti.
Il maestro finge ora di ripetere lo stesso gioco con altri due scolaretti, a cui consegna una scatoletta ciascuno, di quelle che hanno un numero diverso di oggetti; i bambini non lo sanno, le scatole sono chiuse, perciò, seguendo l'esempio precedente, fanno il buco nel coperchio ed estraggono a uno a uno i bottoni. Il lavoro è guidato dal maestro, perchè si svolga con la dovuta lentezza e con l'*indispensabile sincronismo*. A un certo punto (per esempio dopo 4 estrazioni) uno dei due esclama: Io non ne ho più!
E l'altro: Io ne ho ancora!

MAESTRO (*rivolgendosi a quest'ultimo*). – Fermati! Allora il numero dei bottoni è diverso.
Chi saprebbe trovarne la *differenza*?

Qualcuno proporrà di guardare dentro la scatoletta, aprendola.

MAESTRO (*dopo aver fatto eseguire*). – Dunque la *differenza* è 3. (*rivolgendosi al bambino che ha 7 bottoni*). – Quanti erano i tuoi bottoni?
BAMBINO (*conta rapidamente per conto suo*). – Sette.
MAESTRO. – Quanti ne hai levati, insieme al tuo compagno?
BAMBINO. – Quattro.
MAESTRO. – Che differenza t'è rimasta?
BAMBINO. – Tre.
MAESTRO. – Possiamo scrivere alla lavagna:

$$7 - 4 = 3 \textit{ differenza.}$$

La lezione viene completata da numerosi altri esercizi analoghi, durante i quali, presentati gruppi diversi

di oggetti, i bambini saranno chiamati collettivamente e singolarmente a determinarne la differenza, scrivendo poi, ogni volta, alla lavagna l'operazione eseguita e il suo risultato.

Gli esercizi continueranno nei giorni successivi, sempre entro il 10, ricorrendo anche alle sole dita, finchè la maggioranza dei bambini saprà associare con prontezza il concetto di « differenza » all'operazione di sottrazione.

In seguito si faranno altri esercizi, per far capire che la differenza fra due gruppi può avere anche gli aspetti seguenti:

1) ciò che manca a un gruppo per averne uno maggiore.

2) ciò che si deve togliere a un gruppo per averne uno minore.

3) ciò che si deve aggiungere a un gruppo per averne uno maggiore.

Ovviamente le esercitazioni saranno prima pratiche; il risultato richiesto sarà prontamente calcolato dalla maggioranza; ma la vera difficoltà s'incontrerà nella rappresentazione simbolica dell'operazione eseguita, per cui il maestro dovrà spesso aiutare, come nel seguente esempio:

Domanda. Quanti bottoni devi aggiungere a questi 3 per averne 5 ?
Risposta (generalmente pronta). Due.
Domanda. Che cosa rappresentano i due bottoni ?
Risposta (ottenuta con aiuto). La differenza fra 5 e 3.
Domanda. Sai scriverne l'operazione alla lavagna ?

Il bambino, se ha bene assimilato le lezioni precedenti dovrebbe poter scrivere:

$$5 - 3 = 2$$

In tutti questi esercizi, il meccanismo di calcolo mentale, per giungere al risultato, può essere diverso da bambino a bambino e neppure facilmente controllabile. Sta alla sensibilità del maestro scoprire e favorire in ciascuno dei suoi scolari la tendenza, quasi innata, a un determinato procedimento.

Come abbiamo visto, le difficoltà concettuali della sottrazione vanno affrontate subito, quando il calcolo è ancora limitato alla decina; quelle tecniche crescono quando il calcolo si estende oltre il 10. I casi che si presentano sono i seguenti:

1) *il minuendo è maggiore di* 10 *e il sottraendo, minore di* 10, *supera la cifra delle unità del minuendo,* come nella sottrazione: 13 — 7.

Si può risolvere (oralmente) il caso, togliendo dal minuendo successivamente due numeri, che hanno come somma il sottraendo e tali che la prima differenza ottenuta sia 10. (Vedi nota 1 a piè di pagina). Così operando nell'esempio citato si ha:

$$13 - 7 = 13 - (3 + 4) = (13 - 3) - 4 = 10 - 4 = 6$$

2) *il minuendo è maggiore di* 10 *e il sottraendo, minore di* 10, *non supera la cifra delle unità del minuendo,* come nella sottrazione: 18 — 6.

Si può procedere (oralmente) scomponendo il minuendo nella somma di una decina e delle sue unità, togliendo poi dalla cifra di queste il sottraendo (vedi nota II).

Nota I. - La proprietà sfruttata è la seguente: « Per togliere da un numero una somma, si possono togliere successivamente i suoi addendi »; in simboli: $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Nota II. - La proprietà sfruttata è quella per cui, dovendo togliere un numero da una somma, lo si può togliere da uno dei suoi addendi, che sia uguale o maggiore del numero stesso; in simboli:

$$(a + b) - c = a + (b - c) \quad \text{purchè} \quad b \geq c$$

Così operando nell'esempio citato si ha:

$$18 - 6 = (10 + 8) - 6 = 10 + (8 - 6) = 10 + 2 = 12$$

3) *Il caso in cui minuendo e sottraendo superino entrambi la decina*, non presenta difficoltà, perchè si può ricondurre al calcolo entro il 10.

Infatti, dovendo eseguire la sottrazione:

$$19 - 14$$

si può giungere al risultato, sia contando progressivamente da 14 a 19, sia contando regressivamente da 19 a 14, sia infine scomponendo i termini in decine e unità e procedendo come segue:

$$19 - 14 = (10 + 9) - (10 + 4) =$$
$$= (10 - 10) + (9 - 4) = 9 - 4 = 5$$

Naturalmente i passaggi si effettuano oralmente; il procedimento è basato su una nota proprietà relativa alla differenza fra due somme (v. nota) ed è molto proficuo nel calcolo orale di differenze in classi successive alla prima, senza contare che su di esso si basa sempre l'esecuzione scritta della sottrazione.

Sottrazione. - Classe II elementare

In questa classe il calcolo orale della differenza fra due numeri si estende fino al 50 e non presenta altre difficoltà, oltre a quelle già viste in classe prima. Così per

---

NOTA. – La differenza fra due somme si può effettuare togliendo dagli addendi della prima i corrispondenti addendi della seconda, se questi sono uguali o minori di quelli e sommando poi le differenze parziali ottenute; in simboli:

$$(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \quad \text{purchè} \quad a \geq c \text{ e } b \geq d.$$

esempio dovendo calcolare oralmente 48 — 26, si procederà in questo modo:

$$48 - 26 = (40 + 8) - (20 + 6) = (40 - 20) + (8 - 6)$$
$$= 20 + 2 = 22.$$

È evidente, però, che se le unità semplici del sottraendo superano quelle del minuendo, il procedimento visto non si può più eseguire (come risulta anche dalla nota a pag. 62); in tal caso si scompone opportunamente solo il sottraendo, analogamente a quanto si è visto per la classe prima, come si può vedere nell'esempio seguente:

$$32 - 19 = 32 - (10 + 9) = (32 - 10) - 9 = 22 - 9 =$$
$$= (20 + 2) - 9 = (20 - 9) + 2 =$$
$$= 11 + 2 = 13$$

oppure anche

$$32 - 19 = 32 - (10 + 9) = (32 - 10) - 9$$
$$= 22 - (2 + 7) = (22 - 2) - 7 =$$
$$= 20 - 7 = 13$$

L'operazione scritta **si estende fino al** 100, per cui **si presenta il problema dell'incolonnamento** che si affronta e si risolve come si è già visto per la somma (vedi pag. 53).

Se il minuendo ha un numero di unità semplici maggiore di quello corrispondente del sottraendo, l'operazione non presenta difficoltà alcuna, poichè si riduce a due sottrazioni coi termini inferiori a 10.

Sarà bene che il maestro abitui gli alunni fin da principio a calcolare le due differenze parziali nei due diversi modi, corrispondenti ai due diversi concetti di « resto » e di « differenza ».

Ecco un esempio chiarificatore; debbasi eseguire:

89 — 52

Si procede così:

D	U	
8	9	—
5	2	=
3	7	

Alla lavagna il maestro farà dire, sfruttando il concetto di resto: « nove meno due uguale a sette, otto meno cinque uguale a tre »; sfruttando invece il concetto di differenza, farà dire: « due a nove (manca) sette, cinque a otto (manca) tre ».

Abbiamo descritto i due procedimenti, perchè molti maestri amano insegnare l'operazione di sottrazione col metodo del « *prestito* » (che si può praticare col solo concetto di « resto »), giudicando tale metodo più intuitivo e quindi più facile di quello del « *riporto* ». Come conseguenza inevitabile si ha: o la necessità di usare il « prestito » nelle operazioni richiedenti la sottrazione (divisione ed estrazione di radice quadrata), con notevole prolissità e pesantezza dei calcoli, o la necessità inderogabile di insegnare anche il metodo del « riporto » (metodo basato sul concetto di « differenza ») per alleggerire e abbreviare i calcoli delle operazioni precedentemente nominate.

Noi siamo del parere che sia inutile gravare la mente degli scolari di due metodi, uno dei quali, deve essere in seguito abbandonato, tanto più che non esiste una notevole differenza di difficoltà dell'uno rispetto all'altro, come si vedrà tra poco.

Esempio di sottrazione eseguita col metodo del prestito

Si debba eseguire: 83 — 47
Incolonnati i due termini:

D	U	
8 — 1	10 + 3	—
4	7	=
3	6	

(fig. 1)

il maestro fa notare che da 3 unità non se ne possono togliere 7; allora dal gruppo delle 8 decine ne prende « a prestito » una che aggiunge alle 3 unità, e riproduce queste trasformazioni sui termini incolonnati, come in fig. 1. Al risultato (36) tutti i bambini potranno ora facilmente arrivare.

Esempio di sottrazione col metodo del riporto

Debbasi eseguire, come prima, 83 — 47.

Incolonnati i termini, il maestro comincia col far notare, anche qui, che da 3 unità non se ne possono togliere 7. Allora spiega ai bambini che per rendere possibile l'operazione si possono aggiungere 10 unità alle unità del minuendo e una decina alle decine del sottrando (vedi nota a piè di pagina). Dispone l'operazione

---

Nota. – Mentre la giustificazione del metodo del « *prestito* » (termine improprio, perchè non c'è alcuna « restituzione ») è basata sulle proprietà dissociativa e associativa della somma applicate al minuendo (somma di decine e unità) per trasformarlo in modo opportuno, la giustificazione del metodo del riporto è basata sulla proprietà invariantiva della differenza, per cui: $a - b = (a + m) - (b + m)$. Questa proprietà non è così intuitiva come quelle della somma. Però il maestro potrà facilmente dare ragione di essa con esempi pratici ed evidenti (confronto tra gruppi di caramelle o di pennini, fra le età presenti e future di due bambini, ecc.).

come si vede in figura 2 e, oralmente, sfruttando il concetto di differenza, fa eseguire dicendo: « sette al tredici, sei; cinque all'otto, tre ».

D	U	
8	10 + 3	—
1+4	7	=
3	6	

(fig. 2)

Dopo parecchi esercizi i bambini potranno omettere la trascrizione delle 10 unità e della decina; il meccanismo del calcolo sarà facilitato, sfruttando l'analogia che l'operazione così disposta presenta con quella di somma, (quando ci sia un riporto) nel modo seguente (riferendoci alla sottrazione vista prima):
« sette al tredici, sei, col riporto di uno; quattro più *uno* di riporto, cinque, all'otto, tre ».

Dai due esempi riportati si vede che, come avevamo prima affermato, la differenza di difficoltà tra i due metodi, ammesso che ci sia, non è grande; essa è inoltre sensibilmente compensata da due fatti:

1) basta insegnare un solo metodo;

2) nelle sottrazioni con numeri di parecchie cifre, mentre il «prestito» appesantisce in certi casi il calcolo, il «riporto» mantiene sempre inalterata la sua automaticità; così accade, per esempio, nella sottrazione: 4035 — 2986 e in tutte quelle in cui varie cifre del minuendo sono inferiori alle corrispondenti del sottraendo.

Sottrazione. - Classe III elementare

La sottrazione in questa classe si effettua anche con numeri decimali, fino ai centesimi e vale per essa ciò che, nel caso analogo è stato detto dell'addizione (vedi pag. 37); solo bisogna tener presente che, per la sottrazione, è indispensabile il pareggiamento del numero delle cifre decimali.

Sottrazione. - Classi IV e V elementare

La sottrazione si estende a tutti i numeri, interi e decimali, con tutti gli ordini di uso pratico e si svolge con le modalità viste nelle classi precedenti.

LA MOLTIPLICAZIONE

Moltiplicazione. - Classe I elementare

Questa, tra le operazioni, è la più facile; la ragione è ovvia; infatti, non essendo che una somma di addendi uguali, concettualmente non presenta nulla di nuovo e basta saper numerare bene, per trovarne senza sforzo il risultato. Perciò, in prima classe, si insegnerà la moltiplicazione, quando gli alunni avranno raggiunto una buona sicurezza nella numerazione entro il 20, progressiva, per unità e per gruppi di unità. Così il risultato di 5×3 (fino a che non si saprà a memoria) si otterrà contando successivamente per 3 volte 5 unità. È ovvio che la conoscenza della proprietà commutativa è molto utile per facilitare i calcoli. Di essa si può dar facilmente ragione ai bambini, facendo loro eseguire parecchie molti-

plicazioni a fattori scambiati (5×3, 3×5, 6×2, 2×6, ecc. ecc.)

Moltiplicazione. - Classe II elementare

In questa classe il calcolo orale si estende ai prodotti di tutti i fattori (a due, a due) di una cifra e deve diventare molto sicuro e rapido; perciò sono necessari numerosi esercizi, da effettuarsi ogni giorno, fin dal principio dell'anno scolastico, sfruttando i ritagli di tempo e stabilendo gare di ogni tipo; solo così si può raggiungere quella pronta meccanicità, che è la sola garanzia per la buona esecuzione dei calcoli successivi. Molto utile è l'**uso sistematico della tavola pitagorica**, la cui costruzione è bene sia fatta dagli alunni, gradualmente, come segue.

Il maestro, disposti in colonna ed in riga i numeri da 1 a 10, faccia scrivere nella seconda colonna e nella seconda riga, i termini successivi a 2 della numerazione per due, fino a 20, come in fig. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6								
4	8								
5	10								
6	12								
7	14								
8	16								
9	18								
10	20								

(fig. 1)

Sullo schema ottenuto faccia poi notare che i prodotti per 2 di un numero qualsiasi, tra 1 e 10, si trovano al-

l'incrocio della riga (colonna) cominciante con quel numero, con la colonna (riga) del 2.

Dopo un congruo numero di esercitazioni, il maestro faccia aggiungere una terza riga ed una terza colonna, formate dai termini della numerazione per 3 da 3 a 30. Si otterrà lo schema seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12							
5	10	15							
6	12	18							
7	14	21							
8	16	24							
9	18	27							
10	20	30							

(fig. 2)

sul quale il prodotto di 3 per un qualsiasi numero fra 1 e 10 si trova all'incrocio della colonna (riga) del 3 con la riga (colonna) cominciante col numero stesso.

Prima di procedere oltre, il maestro dovrà far calcolare e ripete moltissime volte i prodotti per 2 e per 3; poi farà completare la tavola pitagorica, aggiungendo gradualmente una nuova riga e la corrispondente colonna, solo quando sarà convinto che gli scolari abbiano raggiunto la sufficiente padronanza nei prodotti precedenti.

Consigliamo di ricorrere spesso a giochi che rendano meno noioso l'apprendimento meccanico, fra cui questo, che è una specie di tombola, per il quale occorrono delle cartelle (una per ogni bambino) recanti sei numeri (uno per casella) non primi e non superiori a 90. Il maestro enuncia due numeri di una cifra (i due fattori); i bambini

ne cercano il prodotto sulla loro cartella; se lo trovano, lo coprono con appositi dischetti. Sarà proclamato vincitore chi per primo avrà ricoperto, senza sbagliare, tutti i numeri della sua cartella.

In questa classe il calcolo orale, che si estende fino al 50, comprende anche il prodotto di un numero di due cifre per uno di una cifra. Questi calcoli si effettuano ricorrendo alla *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma* (vedi nota a piè di pagina); basta scomporre il moltiplicando nella somma delle sue decine e delle sue unità e procedere come negli esempi seguenti:

per calcolare oralmente 17×2, si fa osservare che $17 = 10 + 7$, per cui il prodotto richiesto è uguale a:

$$(10 + 7) \times 2 = 10 \times 2 + 7 \times 2 = 20 + 14 = 34$$

e così:

$$16 \times 3 = (10 + 6) \times 3 = 10 \times 3 + 6 \times 3 = 30 + 18 = 48$$
$$12 \times 4 = (10 + 2) \times 4 = 10 \times 4 + 2 \times 4 = 40 + 8 = 48$$

Naturalmente, anche qui, occorreranno numerosi e ripetuti esercizi.

Solo dopo aver raggiunto la sufficiente sicurezza in questi calcoli, gli alunni potranno agevolmente arrivare ai concetti e ai calcoli relativi al doppio, al paio, al triplo, alla dozzina.

La moltiplicazione scritta si estende fino a 100 e comprende solo il caso del moltiplicatore di una cifra. È bene insegnarla ad anno scolastico inoltrato, quando gli alunni sono diventati così sicuri nell'operazione scritta di addizione, da non avere più bisogno di trascrivere

---

NOTA. – Il prodotto di una somma per un numero è uguale alla somma dei prodotti parziali ottenuti moltiplicando ogni addendo della somma per quel numero; in simboli:

$$(a + b) \,.\, m = a\, m + b\, m.$$

il riporto. In questo modo l'unica difficoltà (il riporto), presentata dalla moltiplicazione scritta in seconda, viene ad essere quasi automaticamente superata.

Moltiplicazione. - Classe III elementare

La moltiplicazione si estende fino al mille, con numeri interi e decimali (fino ai centesimi). Il calcolo orale deve essere molto curato, come in seconda, con particolare riguardo alla tavola pitagorica e ai prodotti di un numero per numeri opportuni di due e di tre cifre, calcolati sempre sfruttando la proprietà distributiva.

Esempio.

Per calcolare oralmente 125×3 si fa operare così:

$$125 \times 3 = (100+20+5) \times 3 = 300+60+15 = 375$$

Il gioco della tombola, già visto in 2ª classe (vedi pag. 69), può servire ancora egregiamente, estendendo opportunamente i limiti del calcolo. Può anche essere modificato nel modo seguente.

Le cartelle vanno preparate con 6 numeri ognuna, inferiori a 15 e tali che i loro prodotti, a due, a due, siano nei limiti del programma e delle capacità degli alunni di terza. Gli scolari devono avere a disposizione vari dischetti di diversi colori (vedi gioco di pag. 52). Il maestro scrive con un gessetto colorato un certo numero alla lavagna, non primo, e scelto con criterio; i bambini devono cercare sulla loro cartella due numeri, il cui prodotto sia proprio il numero scritto alla lavagna; se li trovano, li coprono con dischetti del colore fissato dal maestro. Viene proclamato vincitore colui che per primo riesce a ricoprire, senza sbagliare, tutti i numeri della sua cartella.

Nella moltiplicazione scritta gli elementi nuovi sono:

1). *moltiplicatore di due cifre*
2). *fattori decimali.*

Si consiglia di superare la difficoltà del 1° punto nel modo seguente.

Indicata l'operazione, per esempio:

```
 2 3  ×
 1 2  =
-------
```

il maestro fa osservare che il prodotto $2 \times 23 = 46$ è un numero di unità semplici (2 unità ripetute 23 volte) e lo fa scrivere come è qui sotto indicato:

```
 2 3  ×
 1 2  =
-------
 4 6        unità semplici
```

Invece il prodotto $1 \times 23 = 23$ è un numero di *decine* (una decina ripetuta 23 volte); quindi è formato da 3 decine e da 2 centinaia. Scrivendo decine e centinaia incolonnate con quelle del prodotto parziale precedente, si vede che sotto le 6 unità semplici di questo, rimane un posto vuoto; spesso si usa segnare il vuoto con una sbarretta per evitare confusioni. L'operazione risulta allora disposta così

```
   2 3  ×
   1 2  =
---------
   4 6        unità semplici
 2 3 -        decine
```

I due prodotti parziali risultano perfettamente in-

colonnati; non resta che addizionarli (vedi nota a piè di pagina) e l'operazione viene completata come segue:

2 3 ×	
1 2 =	
4 6	unità semplici
2 3 –	decine
2 7 6	risultato

Per quanto riguarda la moltiplicazione con fattori decimali, la regola: « **si moltiplicano i due numeri come se fossero interi e nel risultato ottenuto si separano con la virgola, a cominciare da destra, tante cifre decimali quante sono complessivamente quelle dei fattori** » non può che essere insegnata meccanicamente. Ogni spiegazione sarebbe troppo ardua per le capacità di un alunno, anche bravo, di terza elementare.

Conseguenze molto importanti della moltiplicazione col moltiplicatore di 2 cifre, sono le *regole della moltiplicazione per* 10 *e per* 100 *di un numero intero o decimale.*

Il maestro faccia dapprima eseguire parecchie moltiplicazioni di questo tipo:

10×52; 10×37; 24×10; ecc. ecc.

Fatte le opportune considerazioni sui risultati, sarà facile condurre gli alunni alla regola corrispondente (*aggiunta di uno zero alla destra di un numero intero, per moltiplicarlo per* 10).

In seguito, fatte eseguire, anche solo oralmente, moltiplicazioni del tipo:

100×7; 100×4; ecc. ecc.

Nota. – La regola è, come si ricorda, basata sulla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma; nel caso in esame si ha:

$23 \times 12 = 23 \,.\, (10 + 2) = 23 \,.\, 10 + 23 \,.\, 2 = 23$ decine $+ 46$ unità $=$
$= 46$ unità $+ 23$ decine.

il maestro farà completare la regola precedente, estendendola al prodotto di un numero intero per 100.

Con procedimenti analoghi, effettuati su opportuni esercizi, si possono ricavare le regole relative alla moltiplicazione di numeri decimali per 10 e per 100.

Così da esercizi del tipo:

```
 100 ×              100 ×
  4,7 =             0,21 =
 ------            ------
  700               100
 400-               200-
 ------            ------
 470,0             21,00
```

$100 \times 4{,}7 = 470$ $\qquad$ $100 \times 0{,}21 = 21$

il maestro potrà far ricavare che, *in ogni caso di moltiplicazione per* 100 *di un numero decimale, il risultato si ottiene subito* (senza eseguire l'operazione per esteso), *spostando la virgola di due posti verso destra.*

Naturalmente, anche in questa parte del programma, sono indispensabili moltissimi esercizi, prevalentemente orali, o scritti alla lavagna.

Moltiplicazione. - Classi IV e V elementare

In queste classi la moltiplicazione non presenta alcun elemento concettuale nuovo; non c'è che l'estensione delle regole viste a moltiplicatori di 3 e di più cifre e a potenze di 10 superiori a 100.

Osservazione I. – Se uno od entrambi i fattori della moltiplicazione terminano con uno o più zeri, è opportuno eliminare i prodotti parziali nulli, eseguendo l'operazione solo con le cifre significative e aggiungendo poi alla destra del risultato tutti gli zeri omessi.

La giustificazione di questa regola è basata sulle proprietà dissocia-

tiva e associativa del prodotto e di essa si può dare ragione agli alunni, con una certa facilità, come si vede nell'esempio seguente:
dovendo calcolare 350 × 270 si fa osservare che è come calcolare:

$$35 \times 10 \times 27 \times 10 =$$
$$= 35 \times 27 \times 10 \times 10 =$$
$$= 35 \times 27 \times 100$$

per cui basta eseguire:

```
 35 ×
 27 =
----
245
70-
----
945
```

e quindi concludere che:

$$350 \times 270 = 945 \times 100 = 94500.$$

OSSERVAZIONE II. – Se fra le cifre del moltiplicatore compare qualche zero intermedio, si può eliminare il corrispondente prodotto parziale che risulta nullo, spostando in modo conveniente (di uno, due, ecc. posti, secondo il numero degli zeri consecutivi intermedi) verso sinistra il successivo prodotto parziale non nullo.

Esempio: dovendo calcolare 253 × 408, con la regola generale si avrebbe:

```
    253 ×
    408 =
---------
  2 024
  0 00-
101 2-
---------
103 224
```

si possono invece incolonnare direttamente i prodotti parziali delle unità semplici e delle centinaia, così.

```
    253 ×
    408 =
---------
  2 024
101 2—
---------
103 224
```

con risparmio di spazio e di tempo.

DIVISIONE

Questa è la più difficile delle quattro operazioni, nel concetto e nel calcolo, sia perchè è una operazione inversa (della moltiplicazione), sia perchè il suo procedimento di calcolo richiede la pratica sicura dei procedimenti relativi alla moltiplicazione e alla sottrazione.

Divisione. - Classe I elementare

Molto diffusa è la consuetudine di insegnare la divisione quasi contemporaneamente alle altre operazioni, prima di superare la decina.

Noi riteniamo invece che tale operazione debba essere introdotta quando i bambini dimostrino di essere sufficientemente sicuri nella numerazione e negli altri calcoli entro il 20. Il principale motivo sta nel fatto che proprio nei primi mesi di questa classe i bambini sono sottoposti ad un considerevole sforzo intellettuale, oltre che per imparare a leggere e a scrivere, per acquisire contemporaneamente i principali concetti aritmetici, notevolmente astrusi (numero, somma, differenza, resto, prodotto, simboli, ecc.).

Il problema didattico fondamentale è quello di condurre i bambini al concetto di quoziente (vedi nota a piè di pagina); il relativo calcolo viene di conseguenza attraverso le varie esercitazioni pratiche e diventerà meccanico nelle classi successive con lo studio della tavola pitagorica.

Generalmente si parte dal concetto di quoto (quoziente esatto) per dare in un secondo tempo, quasi sempre in seconda classe, quello generale di quoziente.

Pensiamo invece, e l'esperienza lo prova, che sia più logico ed anche più facile per tutti gli sviluppi successivi, cominciare dal concetto generale.

Nota. – Si ricorda che il quoziente fra due numeri a e b ($b \neq 0$) è quel numero q per il quale valgono le relazioni:

$$b \cdot q \leq a < b(q+1)$$

Dalla definizione di quoziente si ricava facilmente il seguente teorema: il quoziente q fra due numeri a e b ($b \neq 0$) esprime quante volte si può sottrarre b da a e dai resti successivi fino ad avere un resto inferiore a b.

A questo teorema si può ricorrere proficuamente per introdurre il concetto di quoziente nella scuola elementare.

L'importanza e la difficoltà dell'argomento ci inducono a presentare un modo di affrontarlo, come si può vedere nella lezione che segue.

Lezione sul concetto di quoziente

Il materiale didattico occorrente è semplice: bastano 14 caramelle e 16 pennini.

Il maestro chiama davanti ai compagni un alunno e mostrandogli le 14 caramelle, lo invita a farne tanti mucchietti di 3 caramelle ciascuno.

Il bambino comincia a togliere 3 caramelle, formandone un primo mucchietto, poi ne toglie altre 3 e forma un secondo mucchietto, e così via, finchè alle due ultime caramelle si fermerà perplesso.

MAESTRO. – Perchè ti sei fermato?

BAMBINO. – Perchè avanzano solo 2 caramelle e non posso fare un mucchietto come gli altri.

MAESTRO. – Va bene; (*rivolto alla classe*) chi mi sa dire che cosa abbiamo ottenuto?

Molti alzano la mano e uno di essi, interrogato, risponde, con l'aiuto del maestro: — Abbiamo ottenuto 4 mucchietti uguali, di 3 caramelle ognuno e sono rimaste due caramelle.

MAESTRO. – In che modo li abbiamo ottenuti?

BAMBINO. – Togliendo 3 caramelle alla volta.

MAESTRO. – Quante volte?

BAMBINO. – Quattro.

MAESTRO. – Perchè non cinque?

BAMBINO. – Perchè non si può.

A questo punto, davanti agli occhi e alla mente degli alunni, è tutta la questione relativa al quoziente, concepito come *il numero di tutte le sottrazioni che si debbono eseguire per togliere da un gruppo di oggetti, gruppi minori e tutti uguali ai medesimi, finchè ciò è possibile*.

Maestro. — Tutto quanto è stato eseguito e il risultato ottenuto possiamo rappresentarlo alla lavagna molto semplicemente, così:

14 : 3

I due puntini significano che dalle 14 caramelle ne abbiamo tolto successiamente tre alla volta, fin che si è potuto. Questo lavoro si è potuto fare 4 volte, con l'avanzo di 2 caramelle; scriviamo anche ciò, alla lavagna, completando in questo modo:

14 : 3 = 4
2 (caramelle avanzate)

Il maestro domanda ora a questo e a quello il significato di ciascuno dei quattro numeri scritti e dei due puntini.

Da principio parecchi si confonderanno. Le correzioni verranno fatte con l'aiuto dei compagni sui gruppetti di caramelle, ancora disposti sulla cattedra.

Quando, al ripetersi delle stesse domande, le risposte cominciano a diventare meccaniche, il maestro passa all'esercizio coi pennini.

Chiama un alunno, tra i più lenti, e lo invita a formare coi 16 pennini tanti gruppi, fin che si può, di 5 pennini ciascuno.

Il bambino esegue facilmente ed allora il maestro lo manda alla lavagna a scrivere ciò che ha fatto.

Con molta probabilità il bambino farà un pasticcio e allora tutta la classe interverrà a chiarire, a correggere, finchè l'interrogato riuscirà a scrivere:

16 : 5 = 3.
1

A questo punto il maestro spiega che l'operazione scritta alla lavagna si chiama *divisione* e procede ad altri esercizi, volti a consolidare il concetto di quoziente e la rappresentazione simbolica della divisione.

Rimescolate le caramelle, ne fa rapidamente 2 gruppi di 5 caramelle ciascuno, avanzandone 4.

Chiama poi un alunno svelto e, dopo avergli fatto osservare attentamente i mucchietti di caramelle, lo manda alla lavagna a scrivere l'operazione eseguita.

Quindi invita altri alunni a controllare ed, eventualmente, a correggere.

Rimescolati poi i pennini, il maestro scrive alla lavagna:

16 : 3 = 5
1

e invita un alunno a eseguire sui pennini l'operazione scritta alla lavagna.

Anche in questo caso il controllo e la eventuale correzione sarà fatta dai compagni.

Si continuerà in questi esercizi ed in analoghi nelle successive lezioni, finchè gli allievi dimostreranno una sufficiente scioltezza. Durante tali lezioni, il maestro introdurrà qualche esercizio, in cui il quoziente sia esatto e quindi il resto sia zero. La notazione corrispondente sarà appresa molto facilmente, come caso particolare di tutti gli esempi visti prima.

La divisione tra due numeri è l'operazione che serve a risolvere due problemi di carattere diverso:

1°). noto col nome di « **contenenza** », è quello di *determinare il massimo numero di gruppi di* data *numerosità, in cui si può scomporre un* dato *gruppo di oggetti.*

2°). noto col nome di **ripartizione**, è quello di *determinare il numero degli oggetti componenti ognuno degli* n (dati) *gruppi uguali, in cui si può dividere un gruppo* dato.

Attraverso le esercitazioni viste fino a questo punto, i bambini hanno imparato a tradurre con la divisione scritta, la risoluzione, fatta in pratica, di problemi del tipo 1).

Il maestro deve ora esercitare gli alunni a tradurre in operazione scritta la risoluzione, fatta praticamente, di problemi del tipo 2).

Per far capire che l'operazione occorrente è la divisione in entrambi i casi, il maestro farà leva sulla constatazione che, in entrambi i casi, si arriva al risultato cercato, con successive sottrazioni da un gruppo dato, di gruppi minori, tutti uguali, finchè ciò è possibile.

Anche a questo punto, data la difficoltà dell'argomento, crediamo opportuno presentare uno spunto di lezione.

Lezione sulla divisione (*ripartizione*)

Materiale occorrente: 13 caramelle e 12 pennini.

Il maestro chiama presso di sè, davanti alla classe, 4 alunni e ne invita un quinto a distribuire in parti uguali le 13 caramelle ai 4 compagni.

Il bambino rimane esitante e anche i compagni, sollecitati ad aiutarlo, probabilmente non sanno come disimpegnarsi.

Il maestro allora propone un suo modo per risolvere facilmente ed esattamente la questione.

MAESTRO. – Dà una caramella a ognuno dei 4 compagni.

(*Il bambino eseguisce*).

Danne ancora una per uno.

(*Il bambino effettua la seconda distribuzione*).

Ne hai ancora?

BAMBINO. – Sì.

MAESTRO. – Procedi allora come ti ho insegnato, fin che puoi.

Il bambino eseguisce una terza volta, resta con una sola caramella e si ferma.

MAESTRO. – Abbiamo ottenuto quello che volevamo. Ognuno dei vostri 4 compagni ha 3 caramelle; ne è avanzata una, con cui, evidentemente, non possiamo accontentarli tutti. Chi mi sa ripetere, a parole, come abbiamo fatto?

Molti alzano la mano; molti sbagliano o pasticciano; tuttavia il maestro, sfruttando quel che c'è di buono nelle varie osser-

vazioni e indirizzandole opportunamente, condurrà i bambini a constatare che dal mucchietto delle 13 caramelle si sono tolte 4 caramelle alla volta, per tre volte, con l'avanzo di una.

L'invito successivo di tradurre l'operazione per iscritto alla lavagna, troverà senz'altro qualcuno che scriverà:

13 : 4 = 3
1

MAESTRO. – Dunque, anche stavolta, l'operazione eseguita è una divisione.

Si procede poi all'esercizio di distribuire i 12 pennini a 6 alunni. Tutta la classe osserverà che si tolgono 6 pennini per una prima distribuzione, altri 6 per la seconda e che non avanza nulla.

L'operazione: 12 : 6 = 2
0

verrà facilmente scritta alla lavagna ed il maestro troverà modo di far notare che a ognuno dei sei bambini sono toccati due pennini, proprio tanti quante sono state le distribuzioni.

Saranno poi fatti eseguire molti esercizi analoghi, variati nel numero degli oggetti, nella loro qualità e nel numero dei gruppi in cui vengono distribuiti.

Raggiunta una discreta disinvoltura nel risolvere in pratica la questione e nel rappresentarla simbolicamente alla lavagna, il maestro procederà ad alternare esercizi, sempre pratici, di contenenza e di ripartizione.

Infine proverà a proporre problemi uguali a quelli già visti, da risolversi, però, solamente coi numeri, senza ricorrere cioè alle operazioni sugli oggetti.

Non si preoccupi il maestro se parecchi bambini non arriveranno con le loro sole forze alla risoluzione astratta, perchè le difficoltà sono davvero notevoli. Li aiuti e, se è necessario, torni per essi alle esercitazioni pratiche.

Divisione. - Classe II elementare

Per un certo tempo sarà bene che, in questa classe, il maestro faccia eseguire sulla divisione gli stessi esercizi svolti in prima, cercando di raggiungere, per gradi, la completa astrazione.

Il compito gli sarà facilitato dal fatto che, contemporaneamente, si svolgerà lo studio sistematico della tavola pitagorica, mediante la quale potrà far calcolare mnemonicamente il quoziente fra una data coppia di numeri.

Gli esercizi adatti allo scopo saranno del tipo seguente, nel quale compaiono gruppi di divisioni con ugual divisore, che dànno lo stesso quoziente, una volta esatto e altre no:

18 : 6	25 : 5	16 : 4
19 : 6	26 : 5	17 : 4
21 : 6	29 : 5	18 : 4

Gli esercizi analoghi ed estesi fino a 90, con divisore e quoziente di una sola cifra, saranno molto numerosi e ripetuti ogni giorno, anche per poco tempo. Solo in questo modo si otterrà la indispensabile sicurezza nel calcolo.

La divisione scritta offre una certa difficoltà, solo se il quoziente risulta formato di due cifre, perchè il caso del quoziente ad una sola cifra è già stato esaminato.

L'insegnamento dell'operazione scritta può essere svolto come si vede nell'esempio seguente:

si debba eseguire la divisione 67 : 4

Scomponendo il dividendo in decine e unità si ottiene:

D	U		D	U
6	7	: 4 =		

Si procede poi così: « 6 decine diviso 4 dànno 1 decina con l'avanzo di 2 decine » e si scrive

D	U		D	U
6	7	: 4 =	1	
2				

« Ma 2 decine sono 20 unità che aggiunte alle 7 del dividendo formano 27 unità da dividere per 4; le 27 unità si vedono subito trascrivendo (o abbassando) il 7 alla destra del 2 » e si scrive

D	U		D	U
6	7	: 4 =	1	
2	7			

« Le 27 unità divise per 4 dànno 6 unità con l'avanzo di 3 unità » e l'operazione si completa così:

D	U		D	U
6	7	: 4 =	1	6
2	7			
	3			

Tutti gli altri casi rientrano in quello visto, come casi particolari; eccone alcuni esempi:

D	U		D	U
8	6	: 4 =	2	1
0	6			
	2			

NOTA. – La giustificazione del procedimento visto è nota dall'aritmetica razionale ed è basata sulla scrittura di un numero in forma polinomiale.

D	U		D	U
9	6	: 3 =	3	2
0	6			
	0			

D	U		D	U
7	5	: 5 =	1	5
2	5			
	0			

Osservazione. – Il programma ministeriale richiede in questa classe il calcolo orale della metà, della terza e della quarta parte, ecc.; facciamo notare che tale calcolo, sebbene entro il 100, non è facile; vi si perverrà con molti esercizi orali, adoperando, ovviamente, numeri pari per il calcolo della metà, numeri multipli di 3, di 4, ecc. per il calcolo della terza, della quarta parte, ecc.

Divisione. - Classe III elementare

In questa classe la divisione **riguarda numeri interi entro il mille e decimali fino ai centesimi**, **col divisore intero di una sola cifra.**

La divisione fra numeri interi si svolge come in seconda classe.

L'unica difficoltà nuova si ha quando nel dividendo la prima cifra a sinistra (quella delle centinaia) è minore del divisore.

Non è difficile far osservare agli alunni che in questo caso basta scomporre il dividendo nel gruppo delle decine ed in quello delle unità e procedere quindi come prima.

Esempio.

Si debba calcolare 268 : 8

Si osserva che 2 centinaia non si possono dividere per 8; ma 2 centinaia sono 20 decine che aggiunte alle

6 fanno 26 decine che si possono dividere per 8; poi si continua come prima, cioè:

D	U		D	U
2 6	8	: 8 =	3	3
2	8			
	4			

La divisione col dividendo decimale non offre speciali difficoltà se gli alunni sono padroni del significato di ogni cifra, come si desume dall'esempio seguente; si debba calcolare 34,52 : 6.

L'operazione si dispone così:

```
U  d c        U d c
3 4 , 5 2 : 6 = 5 , 7 5
  4 5     decimi
      3 2 centesimi
        2 centesimi
```

Per spiegarla basta far osservare che le 4 unità del 1° resto parziale valgono 40 decimi, che addizionati ai 5 decimi del dividendo, dànno 45 decimi; 45 decimi divisi per 6 dànno per quoziente 7 decimi col resto di 3 decimi, i 7 decimi del quoziente si scrivono alla destra delle 5 unità, separati, ovviamente, con la virgola; per i centesimi si procede in modo analogo.

Si presenta però anche il caso in cui interessi calcolare il quoziente decimale, pur essendo interi dividendo e divisore. L'operazione rientra nel caso precedente, perchè basta trasformare in decimi il resto espresso in unità semplici e trasformare l'ultimo resto (decimi) in centesimi.

Si osservi l'esempio seguente:

```
D U          D U   d
2 6 0 : 8 = 3 2 , 5
  2 0   unità
    4 0 decimi
      0
```

le 4 unità di resto, non più divisibili per 8, equivalgono a 40 decimi, che divisi per 8 dànno i 5 decimi del quoziente.

In questa classe si deve insegnare anche la divisione di un numero intero o decimale per 10 e per 100, secondo le note regole relative allo spostamento della virgola. Come già abbiamo visto per la moltiplicazione, si possono far dedurre dagli scolari tali regole, facendo loro eseguire con la regola generale numerose divisioni per 10.

Si può obbiettare che in terza il divisore deve essere di una sola cifra, mentre il numero 10 ne ha due.

Rispondiamo facendo osservare che il quoziente della divisione di un numero intero per 10, risulta per i bambini molto più facile da calcolare che non quello delle divisioni per 9, o per 8, o per 7.

Ecco alcuni esempi illustrativi del procedimento consigliato:

140 : 10 = 14   da cui   140 : 10 = 14
 40 unità
 0

28 : 10 = 2,8   da cui   28 : 10 = 2,8
 80 decimi
 0

25,6 : 10 = 2,56   da cui   25,6 : 10 = 2,56
 5 6 decimi
 60 centesimi
 0

7 : 10 = 0,7   da cui   7 : 10 = 0,7
70 decimi
 0

6,4 : 10 = 0,64   da cui   6,4 : 10 = 0,64
6 4 decimi
 40 centesimi
 0

Da questi e da numerosi altri esercizi analoghi gli alunni possono dedurre le regole:

1). *per dividere un numero intero per* 10 *basta staccare con la virgola l'ultima cifra a destra.*

2). *per dividere un numero decimale per* 10, *basta spostare la virgola di un posto verso sinistra.*

Le regole analoghe col divisore 100 si possono ricavare poi facilmente. Basta far osservare che, **dividere un numero per 100, equivale a dividerlo successivamente due volte per 10,** quindi il quoziente di un numero intero per 100 si ottiene staccando nel numero stesso con la virgola le ultime *due* cifre a destra e il quoziente di un numero decimale per 100 si ottiene spostando la virgola di *due* posti verso sinistra.

Si consigliano, naturalmente, vari esercizi scritti sulle divisioni per 10 e per 100, secondo le regole viste, sia diretti che inversi, come i seguenti:

340 : 10 =	54 : 100 =
26 : 10 =	3 : 100 =
8 : 10 =	15,3 : 10 =
962 : 100 =	4,1 : 10 =

Sostituire ai puntini il numero adatto:

27 = 270 :	59,2 = ... : 10
3,48 = 348 :	0,24 = ... : 100

Divisione. - Classe IV elementare

Le difficoltà della divisione si esauriscono in quarta elementare; sono però difficoltà notevoli, più che altro per la laboriosità del meccanismo di calcolo. La prima è quella del divisore di due cifre, l'altra del divisore decimale.

La prima si affronta seguendo nel calcolo la regola nota e giustificata in aritmetica razionale (vedi nota a piè di pagina), cominciando dai casi più facili, i quali sono quelli in cui il divisore ha la cifra delle decine maggiore di quella delle unità (21, 32, 41, 42, 43, ecc.); occorrono numerosi e quotidiani esercizi alla lavagna e sul quaderno, in comune e individuali.

La seconda difficoltà necessita della conoscenza della proprietà invariantiva del quoziente (vedi nota a piè di pag. 89), proprietà di cui si possono persuadere abbastanza facilmente gli alunni, con vari esempi adeguati.

Applicando infatti la proprietà invariantiva, col moltiplicare per 10, o per 100, o per 1000, ecc. tanto il dividendo quanto il divisore, questo si può far diventare intero e il quoziente rimane invariato; l'operazione si svolge quindi a divisore intero.

In pratica tutto ciò si compendia nel sopprimere la virgola del divisore e nel trasportare quella del dividendo di tanti posti verso destra, quante erano le cifre decimali del divisore (se il dividendo è intero, si aggiunge alla sua destra un numero di zeri uguale al numero delle cifre decimali del divisore).

Nota. — Per dividere un numero intero qualsiasi per un altro numero intero, si staccano nel dividendo, a partire da sinistra, tante cifre quante bastano per formare un numero maggiore o uguale al divisore: si ottiene così il *primo dividendo parziale*. Si divide questo per il divisore e si ottiene la prima cifra del quoziente; si moltiplica questa cifra per il divisore e si sottrae il prodotto dal primo dividendo parziale; si ottiene così il *primo resto parziale*. Alla destra di questo si trascrive (si abbassa) la cifra del dividendo che segue immediatamente il 1° dividendo parziale; si ha così il *secondo dividendo parziale*. Si opera su di questo come sul primo e si ottiene la seconda cifra del quoziente e il *secondo resto parziale*. Alla destra di questo si trascrive la cifra del dividendo che segue immediatamente quella trascritta prima e si continua il procedimento finchè siano esaurite tutte le cifre del dividendo. L'ultimo resto parziale è il resto effettivo della divisione data.

Divisione. - Classe V elementare

La divisione in questa classe non presenta alcun elemento nuovo degno di nota; continuano gli esercizi di calcolo entro limiti più estesi, con numeri interi e decimali, con divisore di qualsiasi numero di cifre.

Esempi di divisioni col divisore di più cifre, intero e decimale.

904 : 43 = 21
044 (II div. parz.)
01 (resto)

6907 : 321 = 21
0487 (II div. parz.)
166 (resto)

3,765 : 2,8 = 1,34 il resto è 13 : 10 = 1,3
(vedi nota a piè di pagina)

37,65 : 28 = 1,34
96
125
13

8 : 0,35 = 22 il resto è 30 : 100 = 0,3
800 : 35 = 22
100
30

0,75 : 2,5 = 0,3 il resto è 0 (infatti 0 : 10 = 0)
7,5 : 25 = 0,3
75
00

Nota. – Il quoziente tra due numeri non cambia, moltiplicando dividendo e divisore per uno stesso numero.

Il resto, invece, viene ad essere moltiplicato per quel numero.

In simboli:

se $a : b = q$, r si ha: $a\,m : b\,m = q$, $r\,m$

NOTA STORICA.

SOMMA. – *La parola « somma » deriva dal latino « summa ».*

Però, nell'antichità classica si chiamava con « summa » il risultato di qualunque operazione, perchè questo soleva essere scritto al sommo del capitolo.

Cicerone, per esempio, nel De Officiis designa con « summa reliqui » il risultato della sottrazione e lo stesso Leonardo Pisano chiama « summa moltiplicationis » il risultato della moltiplicazione e « summa divisionis » quello della divisione.

L'origine del segno + è oscura; fino a Luca Pacioli, Tartaglia e Bombelli si usò la lettera « p » iniziale di « plus ».

Non si sa se poi il segno + sia nato da una deformazione di « p » o di « et ».

La regola pratica che usiamo per calcolare la somma di numeri di più cifre si trova nel « Liber Abbaci » di Leonardo Pisano (1202). *Questi addiziona sempre dal basso verso l'alto; chiama « numeros in manibus colligere » il sommare le cifre di ogni colonna e « reservare decenas » il riporto.*

In Tartaglia (secolo XVI) si trova il riporto come si usa attualmente.

SOTTRAZIONE. – *La regola è nel « Liber Abbaci » di Leonardo Pisano.*

In Tartaglia si trovano le espressioni « prestar » e « tor in presto » e « rendere ».

L'origine del segno — è oscura; fino al XVI secolo si usò « m » per « minus ».

MOLTIPLICAZIONE. – *Severino Boezio diceva « ducere » per « moltiplicare ».*

Successivamente si disse « producere » e « facere ».

Il prodotto si disse quindi « factum » da cui il termine « factores ».

Molti modi furono escogitati dai matematici italiani per eseguire le moltiplicazioni. Quello comunemente usato oggi è dovuto a Luca Pacioli (XVI secolo); era detto dai Veneziani « per organetto » e dai Fiorentini « per bericuocolo » (da certe paste dolci con marmellata di albicocche). Dal modo « per crocetta » illustrato nell'esempio seguente

$$\begin{array}{c} 59 \\ \times \\ 47 \\ \hline 2773 \end{array}$$

è derivato il segno « × » ora usato nella moltiplicazione.

LA DIVISIONE. – *La divisione era giudicata, prima dell'introduzione del sistema posizionale di numerazione, operazione difficilissima. Venne reputata operazione assai difficile anche dopo, dai matematici del nostro rinascimento, i quali, come per la moltiplicazione, avevano escogitato vari modi per eseguirla. Quello in uso ancora oggi era detto « partire a danda ».*

Il risultato della divisione si chiamava, nel secolo XIII, « numeros

notans quotiens », poi, declinando, fu detto « numerum quotientem », da cui il termine che oggi usiamo di « quoziente ».

Il segno : di divisione si trova, per la prima volta nel testo Johsons – Aritmetic – London – 1633.

Abbaco e tavola pitagorica. – *Fin dai tempi più remoti si usò, per facilitare i computi, uno strumento che i Romani chiamarono « abacus ».*

Questo strumento ebbe aspetti diversi; quello usato dai Romani consisteva in una tavoletta rettangolare con la superficie incavata da alcune scanalature parallele, intestate dai simboli delle unità, delle decine, delle centinaia ecc. e con un'ultima scanalatura a destra, che serviva per le frazioni.

Questo era detto « abbaco a colonne ».

Per rappresentare un numero si mettevano nelle singole colonne tante pietruzze, quante erano le unità di ciascun ordine da rappresentare (calcoli = = pietruzze).

« Mens Pithagorica » *o* « Tavola Pitagorica » *si chiamò poi un abbaco a colonne nel quale alle pietruzze di ogni colonna venne sostituito un solo gettone recante il simbolo numerico corrispondente al gruppo di unità da rappresentare.*

Il nome di « Tavola Pitagorica » *attribuito oggi comunemente alla nota* « tavola di moltiplicazione » *è quindi improprio.*

L'errore è dovuto al fatto che nelle successive riproduzioni manoscritte dell'« Ars Geometrica » *attribuita a Severino Boezio, recante alla fine del primo libro un abbaco a colonne col titolo di « Mensa Pitagorica », fu sostituito a quest'abbaco una comune tavola di moltiplicazione, senza cambiarne il nome.*

QUESTIONE DIDATTICA
RELATIVA ALLE PROVE DELLE OPERAZIONI

Nell'eseguire un'operazione, anche il più provetto calcolatore può sbagliare; è quindi bene controllare se il risultato ottenuto è esatto. La verifica si chiama prova. Questa può consistere nel ripetere la stessa operazione a distanza di tempo, o nel farla ripetere da altra persona. Ma non intendiamo parlare di queste prove, bensì di quelle che si possono fare, applicando ai termini delle operazioni le proprietà a cui soddisfano, talune delle quali sono espresse nella definizione stessa dell'operazione, oppure di quelle prove che si possono fare eseguendo sul risultato e su uno dei termini, l'operazione inversa che dà l'altro termine. Se la prova conferma il risultato o riconduce a uno dei termini dati, si accresce la probabilità di avere bene eseguito l'operazione; in caso contrario si ha la certezza che o l'operazione o la prova sua sono sbagliate.

Per l'**addizione** la prova più semplice è quella di ripeterla cambiando il posto degli addendi; in base alla proprietà commutativa della somma si deve ottenere lo stesso risultato. In pratica si eseguisce l'addizione dal basso all'alto, se prima eia stata eseguita dall'alto al basso e viceversa.

Se gli addendi sono solo due, si può fare la prova togliendo uno di essi dal totale; il resto della sottrazione dev'essere uguale all'altro addendo.

Per la **sottrazione**, la prova si eseguisce addizionando al resto il sottraendo; in base alla definizione stessa di resto, si deve ottenere il minuendo.

Si può anche, come prova, togliere dal minuendo il resto; si deve ottenere il sottraendo.

Siccome però l'addizione è operazione più facile della sottrazione, nelle prove, ovviamente, si preferisce ricorrere all'addizione.

Per la **moltiplicazione**, la prova si eseguisce ripetendo l'operazione coi fattori scambiati di posto; in base alla proprietà commutativa del prodotto, si deve ottenere lo stesso risultato.

Si può anche dividere il prodotto per uno dei fattori; il quoziente esatto deve essere uguale all'altro fattore.

Questo tipo di prova è adatto agli alunni di seconda elementare, i quali, sapendo eseguire soltanto moltiplicazioni col moltiplicatore di una cifra, non potrebbero ricorrere alla proprietà commutativa.

Esempio.

	Prova
28 ×	84 : 3 = 28
3 =	24
84	0

Per la **divisione**, se il resto è zero, la prova si effettua applicando la definizione di quoziente esatto, per cui il prodotto del divisore per il quoziente deve essere uguale al dividendo.

Se il resto della divisione è diverso da zero, prima si guarda se esso è minore del divisore, come vuole la nota proprietà; se fosse maggiore o uguale, l'operazione sarebbe sicuramente sbagliata, perchè il quoziente trovato non sarebbe il massimo numero che moltiplicato per il divisore dia un prodotto minore del dividendo. Se in-

vece il resto è minore del divisore, si passa a verificare se esso è, come vuole la definizione, la differenza tra il dividendo e il prodotto del divisore per il quoziente. Per far ciò basta moltiplicare il quoziente ottenuto per il divisore e al risultato aggiungere il resto; se l'operazione è stata bene eseguita si deve ottenere un numero uguale al dividendo.

Nel caso particolare, ma frequente, di divisione fra numeri decimali, bisogna ricordare che il resto è un numero di unità dello stesso ordine di quello rappresentato per ultimo a destra del dividendo; così, se nel dividendo l'ultima cifra decimale è quella dei centesimi, il resto è un certo numero di centesimi.

Esempio.

5,89 : 25 = 0,23	Prova	0,23 ×
5 8		25 =
89		115
14 centesimi		46
		5,75 +
	resto	0,14 =
		5,89

Un gruppo particolare di prove, assai comode, se pure meno probanti delle precedenti, è quello delle « prove per 9 ».

Esse sono applicabili a tutte le operazioni e sono basate su noti teoremi di aritmetica razionale (vedi nota a piè di pagina).

Nota. – Si ricorda il teorema: « Dati più numeri a, b, c, la loro somma (il loro prodotto), divisa per 9, dà lo stesso resto che la somma (il prodotto), divisa per 9, dei resti della divisione per 9 dei singoli addendi (fattori)».

In particolare si ha che un numero, diviso per 9, dà lo stesso resto che la somma delle sue cifre. Ma per trovare il resto per 9 della somma delle cifre, basta da essa togliere successivamente 9 finchè è possibile, facili-

Prova per 9 dell'addizione. Si calcolano i resti per 9 dei singoli addendi e il resto per 9 della somma di tali resti; questo deve risultare uguale al resto per 9 del totale.

Esempio.

4.073 +			5	resti per 9 degli addendi
249 +			6	
3.952 +			1	
70.618 =			4	
78.892	resto per 9 del totale	7	7	resto per 9 della somma dei resti

Prova per 9 della sottrazione. Si sommano i resti del risultato e del sottraendo; il resto per 9 di tale somma, deve essere uguale a quello per 9 del minuendo.

Esempio.

29.873 —	2	2	resto per 9 somma resti
5.697 =	resto per 9 minuendo	0	resto per 9 del sottr.
24.176		2	resto per 9 della differ.

Prova per 9 della moltiplicazione. Si moltiplicano fra loro i resti per 9 dei fattori; il resto per 9 di tale prodotto deve essere uguale a quello per 9 del risultato.

Esempio.

tando il computo, col tralasciar di sommare le cifre uguali a 9 del numero e quelle che, associate, dànno per somma 9.

Esempio. – Se il numero è 8.3 2 6.5 9 7, si tralasciano le cifre: 9, 7 e 2, 6 e 3 e si calcola la somma 8 + 5 = 13, il cui resto per 9, essendo uguale a quello della somma delle sue cifre, è 4.

Prova per 9 della divisione. Si calcola il resto per 9 del quoziente e lo si moltiplica per il resto per 9 del divisore; si trova il resto per 9 del prodotto dei due resti; ad esso si addiziona quello relativo al resto della divisione data; si calcola il resto per 9 di tale somma; quest'ultimo resto deve essere uguale a quello per 9 del dividendo.

Esempio.

Osservazione I. – I resti della divisione per 9 sono sempre minori di 9, perciò se la somma delle cifre di un numero è 9, il resto è 0 (zero) e non 9 (nove) come spesso si vede scrivere.

Osservazione II. – Se l'operazione da verificare è sbagliata, in modo che la somma di due cifre errate sia uguale a quella che si avrebbe con le cifre giuste, dalla prova per 9 non si può rilevare l'errore, come si vede nell'esempio seguente:

QUESTIONI DIDATTICHE
RELATIVE AL SISTEMA METRICO DECIMALE

In questo campo, forse più che in tutti gli altri, l'insegnamento acquista facilmente carattere meccanico e mnemonico, sia per la quasi totale mancanza del materiale didattico adeguato (campioni di unità fondamentali, dei loro multipli e sottomultipli, bilancia, ecc.), sia per la convinzione diffusissima che certe « regolette » (scale ascendenti e discendenti, l'andare a due per due, a tre per tre, ecc.) possono far superare anche ai meno capaci le difficoltà dell'argomento.

Tale convinzione è molto fallace: gli alunni acquistano, è vero, una momentanea agilità, ma, dopo qualche tempo, quando si trovano, nella vita o nella scuola, a dover trattare direttamente le unità di misura studiate, commettono errori molto gravi, perchè quello che è affidato puramente alla memoria svanisce e nulla o quasi rimane senza l'adeguato substrato concettuale.

A conferma di quanto abbiamo detto sopra sta la nostra diretta esperienza: candidati maestri, interrogati sulle questioni didattiche relative al sistema metrico decimale, di fronte a trasformazioni di unità, o sbagliano in modo grossolano, o per dare giustificazione del risultato dell'operazione effettuata, dicono grossi spropositi, perchè, invece che affidarsi al buon senso, tentano di ripescare nella memoria le famose regolette imparate molti anni prima.

Inoltre è notorio che anche alunni di limitatissima capacità imparano meccanicamente a trasformare unità di misura in altre multiple o sottomultiple; ma gli stessi alunni, in un problema o nella pratica, posti di fronte alla necessità di trasformazioni analoghe (non espressamente richieste), non riescono neanche ad intuirle.

A che sono servite allora le pagine e pagine di « equivalenze » eseguite?

Ciò che conta molto, invece, è:

1) la reale, diretta conoscenza delle unità di misura, dei loro multipli e dei loro sottomultipli.

2) l'intuizione al giusto momento dell'operazione da effettuarsi per eseguire una « equivalenza ».

Unità di lunghezza

Il maestro deve avere a sua disposizione un metro lineare, graduato in cm., cosa non difficile, dato il costo relativamente basso dell'oggetto.

Perchè i bambini imparino a ben conoscerlo, devono usarlo.

Perciò il maestro, dopo averlo presentato, dopo aver presentato anche il dm ed il cm. e fatto constatare che il metro contiene 10 dm. e 100 cm., inviterà gli alunni, uno per volta, a misurare, sotto la sua guida, determinate lunghezze (spigoli della cattedra, bordi del quaderno, lato di una piastrella, lunghezza di una parete, ecc. ecc.) ed a scrivere alla lavagna i risultati ottenuti.

Tutti i compagni dovranno prendere parte a queste operazioni, controllando sia la misurazione che la scrittura e correggendo gli eventuali errori.

Questo esercizio piace, in genere, a tutti i bambini; così nella loro mente, senza che essi se ne rendano conto,

si verranno concretando i concetti di « metro » e dei suoi sottomultipli, i loro relativi rapporti e la loro rappresentazione simbolica.

Sorvolando un poco sul « rigore scientifico », sarà utile far costruire ad ogni alunno un suo metro personale (con nastri di fettuccia, con strisce di carta, ecc.); le misurazioni così potranno essere moltiplicate e con esse i vari tipi di esercizi relativi.

Ne proponiamo qualcuno dei tipi seguenti:

1) Il maestro scrive alla lavagna una lunghezza, per esempio: cm. 75 ed invita un bambino a segnare sulla lavagna due punti che abbiano tra loro questa distanza; lo stesso esercizio si può ripetere con misure maggiori sul pavimento.

2) Il maestro presentando un bastoncino o una strisciolina di carta o il bordo di un quaderno, di un astuccio, ecc., stabilirà una gara fra gli alunni per la migliore valutazione della lunghezza a occhio. Seguiranno le misurazioni di verifica.

3) Misurata una lunghezza in una *data unità*, il maestro inviti gli alunni ad esprimere la misura ottenuta nelle *altre unità* note.

È in questo esercizio che di solito si ama ricorrere alle famose « regolette ».

Invece, se gli alunni hanno assimilato bene i concetti relativi, risolveranno spontaneamente i casi semplici. Solo se qualche alunno più lento si trova imbarazzato o se l'esercizio proposto presenta qualche difficoltà, il maestro intervenga indirettamente a far ragionare ed a risolvere la questione come un qualsiasi problema di aritmetica.

Per esempio l'esercizio di esprimere la lunghezza di m. 2 in dm. o in cm. è facile; mentre l'esercizio di esprimere la lunghezza di cm. 35 in dm. o in m. è notevolmente più difficile.

In questo caso il maestro fa sfruttare il concetto già acquisito di *cm.* come decimo di *dm.*; per cui gli riesce abbastanza facile condurre gli alunni alla conclusione che:

cm. 35 sono 35 decimi di dm., cioè

cm. 35 sono dm. 3,5 (vedi nota a pag. 100).

Analogamente i 35 cm. vengono espressi in metri.

4) Nelle misurazioni di grandezze più lunghe di 1 metro, ma non multiple dello stesso, gli alunni si trovano di fronte a problemi pratici di questo tipo:

m. 1 + cm. 65.

Tutti gli alunni si convinceranno subito e facilmente che il risultato della somma non è nè 66 cm. nè 66 m. e loro stessi constateranno la necessità di trasformare i m. in cm., o viceversa.

Nel primo caso si otterrà:

m. 1 + cm. 65 = cm. 100 + cm. 65 = cm. 165.

Nel secondo caso si avrà:

m. 1 + cm. 65 = m. 1 + m. 0,65 = m. 1,65

Quest'ultima operazione porta gli alunni anche alla osservazione importantissima che la prima cifra a destra della virgola rappresenta i decimetri e la seconda i centimetri.

Molti esercizi analoghi porteranno al concetto che ogni cifra della scrittura decimale rappresenta un ben determinato multiplo o sottomultiplo dell'unità scelta.

Tale concetto sarà sempre più chiarito da esercizi inversi del tipo seguente:

m. 2,45 = m. 2 + dm. 4 + cm. 5

I multipli del metro (dam., hm., km., Mm.) che non cadono direttamente sotto l'esperienza degli alunni, verranno introdotti in seguito per estensione. Ovviamente gli esercizi relativi sono astratti e verranno fatti per analogia.

I problemi che si riferiscono alle unità di lunghezza non presentano difficoltà nuove, se la loro risoluzione non richiede una trasformazione di unità.

Infatti il procedimento logico seguito non differisce da quello a cui i bambini sono abituati per tutti gli altri problemi, come si vede nell'esempio che segue:

« Compero m. 17 di fettuccia a L. 23 il metro. Quanto spendo? Pago con un biglietto da L. 500, quanto ricevo di resto? »

Nota. – L'insegnamento dei sottomultipli del metro si fa in terza elementare, ovviamente dopo l'insegnamento dei numeri decimali e delle loro operazioni.

I problemi che richiedono una trasformazione di unità possono essere distinti in due categorie:

1) **Quelli in cui la trasformazione è indispensabile per effettuare l'operazione richiesta dal problema.**

2) **Quelli in cui compaiono questioni di prezzo ed il costo unitario è riferito ad unità diverse da quelle espresse nel problema.**

I problemi della prima categoria vengono affrontati subito dai bambini in modo pratico quando devono addizionare o sottrarre i risultati di varie misurazioni, ottenuti in unità diverse (vedi pag. 100); per cui la riduzione di misure alla stessa unità, nel caso di somma o differenza, diventa per essi un'operazione immediata.

Casi meno facili si incontrano quando si deve dividere una lunghezza per un'altra allo scopo di determinare quante volte la seconda sta nella prima.

Però, siccome l'operazione di divisione corrisponde (vedi pag. 76) a una serie di successive sottrazioni, gli alunni si convinceranno, abbastanza facilmente, della necessità di ridurre dividendo e divisore alla stessa unità di misura.

Esempio:

Ho comperato m. 5,40 di spighetta per orlare dei colletti; sapendo che ne occorrono cm. 45 per ogni colletto, quanti colletti potrò orlare?

Risoluzione

I colletti che potrò orlare sono tanti quante sono le volte che si possono sottrarre cm. 45 da m. 5,40.

Però, per effettuare l'operazione, bisogna trasformare i m. 5,40 in cm. 540.

Per cui si ha:

numero colletti = 540 : 45 = 12.

I problemi della seconda categoria sono quelli di uso pratico più comune e il maestro dovrà insistervi molto sfruttando l'esperienza quotidiana dei ragazzi e facendo fare loro molti esercizi orali.

Esempio:

Per fare una cravattina occorrono cm. 75 di nastro che costa L. 160 al metro; quanto si spende?

Risoluzione

Si osserva che se un metro di nastro costa L. 160, un cm. costerà:

$$\text{L. } 160 : 100 = \text{L. } 1{,}6$$

per cui cm. 75 di nastro costeranno:

$$\text{L. } 1{,}6 \times 75 = \text{L. } 120.$$

Unità di peso

Riteniamo indispensabile per questo argomento l'uso della bilancia con relativa pesiera.

Ogni scuola dovrebbe esserne provvista.

Pensiamo che, come molte scuole sono state dotate di radio e di cinema, potrebbero essere provviste anche del materiale didattico costoso, se indispensabile.

Come può un bambino arrivare al concetto di kg, di hg., di g., dei relativi rapporti se non può averne i campioni tra le mani ed esercitarsi con essi? Nelle case raramente esistono; nei negozi non possono essere toccati e molto spesso mancano perchè le bilance sono automatiche. In questo campo l'esperienza del bambino è dunque assolutamente inadeguata.

Il maestro, col materiale a disposizione, presenterà i vari campioni, farà constatare con la bilancia che 10 hg. equilibrano 1 kg., che 10 dag. equilibrano 1 hg., ecc.;

naturalmente non è indispensabile avere 10 pesi uguali e graduati, basta avere i fondamentali.

Infatti pesato un oggetto di 1 hg. si farà notare che 10 di tali oggetti pesano 1 kg. Gli alunni eseguiranno sotto la guida del maestro varie pesate e scriveranno i risultati ottenuti alla lavagna; i compagni controlleranno e correggeranno. Si svolgeranno esercizi sulla bilancia analoghi a quelli già consigliati per le misure di lunghezza.

Lo stesso dicasi per i problemi i quali potranno essere arricchiti da molti altri, pratici sulla compra-vendita scolastica (v. pag. 168).

Unità di capacità

Lo studio di queste unità di misura (l., hl., ecc.) è più ridotto dei precedenti e quindi più facile. Il campione del litro è noto a tutti i bambini (bottiglia del latte o del vino); da qui la maggior facilità dell'argomento. Per gli esercizi valgono tutte le considerazioni fatte per le altre unità di misura.

Osservazioni. – Si consigliano i maestri di sfruttare quelle unità di misura che sono veramente usate nella pratica, lasciando in disparte le altre, (Mg, Mm, cl, dag, dg, ecc.).

Si consigliano anche di tralasciare certe equivalenze che servono ad una pura e semplice esercitazione meccanica, come la seguente:

mg. 25 = q. . . . !

Unità di superficie

Il materiale didattico occorrente per svolgere questo argomento si limita a un quadrato di cartone di lato 1 metro, suddiviso con righe molto sottili in 100 quadrati uguali; a 100 quadrati di cartoncino di lato 1 dm. e a 100 quadratini, pure di cartoncino, di lato 1 cm.;

ci si fornisce facilmente di questo materiale e con modica spesa.

I punti fondamentali della questione sono:

1) **L'acquisizione delle dimensioni dei campioni nominati (m.^{2}, dm.^{2}, cm.^{2}).**

2) **La deduzione sperimentale dei rapporti relativi.**

Entrambi vengono superati con il diretto confronto dei campioni, mediante sovrapposizione.

Solo quando gli alunni avranno raggiunto una certa padronanza nello stabilire i rapporti richiesti attraverso pratiche esercitazioni, il maestro procederà ad esercizi analoghi, ma astratti.

Successivamente per analogia verranno introdotti i multipli del m.^{2} (dam.^{2}, hm.^{2}, km.^{2}) e il mm^2.

L'estensione alle misure agrarie verrà fatta in seguito e non presenterà difficoltà alcuna.

Consigliamo esercizi analoghi ai seguenti:

1) Far ricoprire tutto il m^2. con i dm^2.; farne contare il numero; far determinare la relazione fra m^2. e dm^2. e quindi la reciproca.

2) Analogamente procedere per il dm^2. e il cm^2.

3) Far ricoprire un dm^2. del m^2. con i 100 cm^2. e far dedurre con elementari considerazioni sul materiale in esame la relazione fra il m^2. e il cm^2. e la reciproca.

4) Formare una striscia di 10 dm^2. e una di 10 cm^2.; far dedurre che la prima striscia è $\frac{1}{10}$ di m^2., la seconda è $\frac{1}{10}$ di dm^2.; per cui si potranno scrivere le relazioni:

$$\text{dm}^2.\ 10 = \text{m}^2.\ 0{,}1$$

$$\text{cm}^2.\ 10 = \text{dm}^2.\ 0{,}1$$

e le reciproche.

5) Estendere l'esercizio precedente a un certo numero intero di strisce, per cui si potranno scrivere alla lavagna relazioni del tipo:

$$\text{dm}^2.\ 30 = \text{m}^2.\ 0{,}3$$
$$\text{dm}^2.\ 0{,}5 = \text{cm}^2.\ 50.$$

6) Far eseguire esercizi analoghi ai precedenti, più estesi (quindi astratti), del tipo seguente:

$$\text{dm}^2.\ 150 = \text{m}^2.\ 1{,}5$$
$$\text{dm}^2.\ 2{,}7 = \text{cm}^2.\ 270.$$

7) Far trasformare un certo numero di dm². in m². e viceversa sfruttando il concetto che il dm². è $\frac{1}{100}$ di m².; far interpretare il significato delle cifre dei numeri decimali ottenuti; analogamente per i passaggi diretti e inversi dal dm². ai cm².

Esempio:

$$\text{dm}^2.\ 35 = \text{m}^2.\ \frac{35}{100} = \text{m}^2.\ 0{,}35$$

cioè si hanno: tre strisce di 10 dm²., ossia $\frac{3}{10}$ di m²., più 5 dm².

8) Far eseguire passaggi dal m². ai cm². e reciproci sfruttando quello (sottinteso) attraverso il dm².

Esempio:

$$\text{m}^2.\ 2{,}38 = \text{cm}^2.$$

si farà ragionare così:

1 m². vale 100 dm²., per cui:

$$\text{m}^2.\ 2{,}38 = \text{dm}^2.\ 238$$

e poichè 1 dm². vale 100 cm²., si ha:

$$\text{dm}^2.\ 238 = \text{cm}^2.\ 23.800$$

per cui risulta:

$$\text{m}^2.\ 2{,}38 = \text{cm}^2.\ 23.800.$$

Gli esercizi precedenti, opportunamente variati e al-

ternati, resi più complessi ed astratti, estesi anche al mm.^{2}, al dam^2, all'hm^2, al km.^{2} e alle unità agrarie, daranno all'alunno la necessaria sicurezza ed agilità.

Unità di volume

È assolutamente necessario essere provvisti di un cubo cavo, avente il lato di 1 dm. (con la faccia interna della base divisa da righe sottili in 100 cm.^{2}, con gli spigoli divisi in 10 parti uguali) e possibilmente di 100 e più cubetti col lato di 1 cm.

Con questo materiale si può far dedurre da considerazioni pratiche che 1 cm^3 è la millesima parte di 1 dm.^{3}.

Infatti si ricopre il fondo del cubo grande con 100 cubetti; si ottiene così uno strato; si fa notare che di questi strati se ne possono formare 10, per cui risulta che il dm^3. contiene esattamente 100 × 10 cm.^{3} ossia 1.000 cm.^{3}.

Questa esperienza serve anche per far notare che uno strato di cento cubetti è la decima parte del cubo per cui cm.^{3} 100 = dm.^{3} 0,1 e viceversa.

Si può procedere poi a realizzare la seguente esperienza:

Lungo uno spigolo verticale del dm.^{3} si incolonnino 10 cm.^{3}; si proponga il problema di determinare che parte è la colonnetta di tutto il cubo. Si arriverà a concludere che su ogni cm.^{2} di base si può innalzare una colonnetta uguale alla prima e che, essendo 100 i cm.^{2} della base, le colonnette saranno in tutto 100; per cui ogni colonnetta è la centesima parte del cubo. Si ha quindi la seguente relazione:

$$\text{cm.}^3\ 10 = \frac{1}{100} \text{ di dm.}^3 = \text{dm.}^3\ 0{,}01$$

e viceversa:

$$\text{dm.}^3\ 0{,}01 = \frac{1}{100} \text{ di dm.}^3 = \text{cm.}^3\ 10.$$

Gli esercizi da effettuarsi in seguito sono analoghi a quelli visti per le unità di superficie, ma necessariamente più astratti. Tuttavia le esperienze fatte, opportunamente richiamate o rifatte, aiuteranno notevolmente l'intuizione e la logica.

Le unità di volume servono anche per misurare la capacità di un recipiente; ma, per essa, l'unità di misura specifica è il litro. Si può quindi presentare il caso di dover passare dalle une alle altre unità. Basterà far vedere ai bambini che, per riempire di acqua il dm.^{3} cavo, ne occorre proprio un litro, per cui vale la relazione

$$\text{dm.}^3\ 1 = 1 \text{ litro;}$$

da questa si ricavano poi tutte le altre.

NOTA STORICA.

Alla fine del XVIII secolo lo sviluppo degli scambi commerciali, delle industrie e il progresso delle scienze indusse gli scienziati (astronomi e fisici) a proporre definizioni di Unità di misura ricavate da campioni naturali e mondiali (quindi atte ad essere adottate da tutte le nazioni) con multipli e sottomultipli tutti decimali.

L'Assemblea Costituente francese, nel 1790, *nominò a questo scopo una commissione di scienziati; in seguito alla relazione di questa nel* 1795 *veniva fondato il nuovo sistema di misure nel quale il* metro *era definito come* « la decimillesima parte del quarto del meridiano terrestre ». *Quattro anni dopo veniva depositato negli Archivi di Francia il campione di platino – metro di Borda – che, alla temperatura di zero gradi, dava la lunghezza legale del metro, determinata in cinque anni di lavoro sulla misura di un arco di meridiano terrestre. Contemporaneamente veniva stabilito che, per unità di misura dei pesi, si dovesse assumere il* chilogrammo, *definito dal* peso di un dm^3. di acqua distillata, alla temperatura di 4 gradi centigradi e sotto la pressione atmosferica. *Di esso venne costruito un campione di platino che fu depositato negli Archivi di Francia, insieme al campione del metro.*

Il sistema metrico decimale, costruito su queste basi, divenne obbligatorio in Francia nel 1801. *Ma Napoleone lo giudicò « impopolare » e ritornò alle antiche unità in uso.*

Però le inderogabili necessità commerciali indussero i successivi Governi francesi a rendere obbligatorio il Sistema metrico decimale a partire dal 1840. *Molti altri stati fecero successivamente altrettanto. Così questi, in numero di diciotto, nel* 1875, *deliberarono che, ai campioni nazionali francesi*

fossero sostituiti nuovi altri campioni, internazionali, *più precisi dei precedenti, costruiti in una lega di Platino ed Iridio* ($^{10}/_{100}$ *di Iridio) e che questi venissero conservati a Sèvres vicino a Parigi, in un apposito Ufficio internazionale detto « Dei pesi e misure ». In seguito, però, il progresso della tecnica rivelò divergenze apprezzabili anche fra gli ultimi campioni costruiti e quelli naturali di cui questi dovevano essere la realizzazione pratica.*

Ma poichè per quanto accurata e raffinata ne possa essere l'esecuzione, l'identità fra campioni pratici e naturali non potrebbe mai essere raggiunta, si decise di abbandonare le definizioni originarie e di assumere come campioni del metro e del chilogrammo quelli in Platino iridiato già in uso, *conservandoli con la maggiore accuratezza.*

QUESTIONI DIDATTICHE SUL « PESO SPECIFICO »

Il concetto di « *peso specifico* » è molto importante, anche per la vita pratica; ma è un concetto difficile, tanto è vero che, se non è ben colto all'origine, raramente riesce a concretarsi nella mente dei giovani malgrado lo studio relativo che ne faranno successivamente.

Questo concetto è duplice: (vedi nota a piè di pagina).

a) **peso dell'unità di volume di un dato corpo (peso specifico assoluto).**

b) **rapporto fra il peso del corpo e quello di un ugual volume di acqua distillata, alla temperatura di 4 gradi centigradi (peso specifico relativo all'acqua).**

NOTA. – Le tabelle per i pesi specifici dei corpi, riportate in generale dai libri di testo, non dànno i pesi specifici assoluti, ma i relativi. Per questo, essendo tali pesi specifici dei rapporti, e quindi dei numeri puri, le tavole non portano indicazione alcuna di unità di misura. Ne risulta che, quando si trova scritto su tali tavole, per esempio: « peso specifico del Piombo = 11,35 », ciò significa solo che un certo volume di Piombo pesa 11,35 volte di più di un uguale volume di acqua nelle condizioni prescritte.

Il peso specifico assoluto, invece, non è un numero: è una grandezza fisica ben definita. Come tale necessita delle unità di riferimento di peso e di volume. Così, (riferendoci ancora all'esempio riportato), si avrà: peso specifico assoluto del Piombo = gr. 11,35 per cm³; il che significa:

1 cm³ di Piombo pesa gr. 11,35.

Il secondo concetto non è adatto ad una scuola elementare:

1) perchè gli scolari non riescono a capire il significato di acqua distillata.

2) perchè non possono capire la ragione dei 4 gradi di temperatura.

3) perchè l'idea di rapporto è molto ardua.

Il primo concetto di peso specifico invece, basato solo sulle nozioni di peso e di unità di volume, può essere introdotto esaurientemente, rigorosamente e in modo adeguato alla mentalità di alunni di undici anni.

L'importanza e la delicatezza dell'argomento ci inducono a proporre un esempio di lezione introduttiva.

Lezione sul « Peso specifico »

Materiale didattico occorrente:

1 bilancia con relativa pesiera
1 cubetto di piombo di lato 1 cm.
1 cubetto di stucco di lato 1 cm.
1 cubetto di legno forte di lato 1 cm.
1 cubetto di sughero di lato 1 cm.
1 parallelepipedo rettangolo (possibilmente di cm.^{3} 2 × × 12 × 6) di marmo.
1 grosso tappo di sughero da botte.

Sulla cattedra troneggia la bilancia con la pesiera accanto e, dietro di essa, sta il resto del materiale.

MAESTRO (*rivolto agli alunni*). – Secondo voi pesa di più il sughero o il piombo?

ALUNNI IN CORO. – Il piombo!

MAESTRO. – Davvero? Vediamo.

Pone su un piatto della bilancia il grosso tappo, sull'altro piatto il cubetto di piombo; la bilancia trabocca dalla parte del sughero.

MAESTRO. – Avete sbagliato; non è il sughero che pesa di più?

Proteste e discussioni; qualcuno però arriva ad osservare che non c'è proporzione tra le dimensioni dei due oggetti; il tappo di sughero è evidentemente troppo grosso rispetto al cubetto di piombo.

MAESTRO. – Lo tagliamo in mezzo? In quattro parti? Come dobbiamo fare?

Gli alunni si agitano, discutono, propongono; il maestro coordina le idee e le guida alla conclusione che, per poter fare un sicuro confronto, i due corpi devono avere lo stesso volume.

MAESTRO. – Avete notato quale è il volume del piombo? Guardatelo! È un cm^3. — (estraendo il cubetto di sughero da dietro la bilancia) — ecco qui un cm^3. di sughero.

Pone questo al posto del tappo sulla bilancia e questa (con grande soddisfazione degli alunni) trabocca ora dalla parte del piombo.

MAESTRO. – E se vi chiedessi ora se pesa di più il legno o il sughero, come potreste rispondermi?

Gli alunni, un po' perplessi, fanno varie proposte finchè, sotto la guida del maestro, qualcuno suggerisce che occorre un cm^3. di legno per poter fare il confronto.

MAESTRO. – Eccolo! (*lo estrae da dietro la bilancia e lo sostituisce sul piatto della stessa, al cubetto di piombo*).

Gli alunni constatano che il sughero è più leggero anche del legno.

MAESTRO. – Abbiamo trovato un metodo sicuro per decidere se un corpo è più pesante di un altro, non è vero? Come facciamo?

ALUNNI (*eventualmente aiutati*). – Prendiamo un cm^3. di ogni sostanza. *Ne confrontiamo i pesi ponendoli sulla bilancia.*

MAESTRO. – Però il metodo non è molto comodo. Prima di tutto si può non avere a disposizione 1 cm³. di ogni sostanza e poi, se le sostanze da confrontare sono molte, si andrebbe per le lunghe dovendole sempre confrontare a due a due. Proviamo invece a pesare uno per uno i singoli cubetti. (*Li pesa e ne scrive i pesi trovati sulla lavagna*).

1 cm³. di piombo pesa gr. 11,35
1 cm³. di sughero pesa gr. 0,24
1 cm³. di legno pesa gr. 0,8.

MAESTRO. – Vedete? Da questa tabella si ricava subito quali sono i corpi più pesanti e quali i più leggeri.
Il peso espresso in grammi di ogni cm³. di una sostanza si chiama « **peso specifico** » (vedi nota pag. 109). gr. 11,35 — gr. 0,24 — gr. 0,8 ... sono i pesi specifici del piombo, del sughero, del legno. Come faremmo allora per sapere il peso specifico dello stucco?

ALUNNI. – Pesiamo 1 cm³. di stucco.

MAESTRO. – Eccolo.
(*Lo pesa e trova g.* 1,80).
Il peso specifico dello stucco è g. 1,80. Potete dirmi ora se è più pesante lo stucco o il legno?

ALUNNI. – Lo stucco.

MAESTRO. – Perchè?

ALUNNI. – Perchè il suo peso specifico, gr. 1,80, è maggiore di gr. 0,8 ... che è quello del legno.

Il maestro, dopo aver fatto eseguire collettivamente esercizi vari sull'interpretazione del numero che dà il peso specifico di certe sostanze (desunto da una sua tabella) propone un nuovo problema.

Presenta il parallelepipedo di marmo e invita gli alunni a determinarne il suo peso specifico.

Lì per lì gli scolari restano disorientati; alla non improbabile proposta di tagliarne via un cubetto di lato 1 cm., il maestro ne fa constatare l'assoluta impossibilità materiale.

Qualora nessuno trovi una via d'uscita, il maestro può cominciare a chiedere se non è possibile sapere quanti cm³. sono contenuti nel parallelepipedo. Tutti rispondono che per questo bisogna calcolarne il volume. Gli spigoli vengono misurati e risulta che il numero richiesto è 144.

MAESTRO. – I cubetti di 1 cm.^{3} contenuti nel nostro parallelepipedo sono dunque 144. Ora è facile determinare il peso di ciascuno di essi. Come faremo?

ALUNNI. – Pesiamo il parallelepipedo e dividiamo per 144.

Il maestro pesa il solido, ottiene hg. 3,75; scrive alla lavagna:
hg. 3,75 = g. 375 (peso del parallelepipedo di marmo)

g. 375 : 144 = g. 2,6... peso di 1 cm^3. o *peso specifico del marmo.*

Il maestro propone ora qualche altro problema analogo al precedente, ma astratto. Attraverso le varie risoluzioni a cui prende parte tutta la classe egli ha modo di controllare se il concetto di peso specifico è stato acquisito e successivamente di far ricavare dagli alunni stessi la regola che per determinare il peso specifico di un corpo basta dividere il peso dello stesso espresso in gr. per il suo volume espresso in cm^3.

In lezioni successive il maestro tornerà sull'argomento, ripetendo, se occorre, qualcuno degli esercizi pratici già fatti; potrà poi far risolvere anche i problemi inversi:

1) **determinazione del peso di un corpo essendo noti il volume e il peso specifico.**

2) **determinazione del volume di un corpo, essendo noti il peso e il peso specifico.**

Questi risulteranno abbastanza facili se il concetto di peso specifico è stato ben assimilato.

Si consigliano molti problemi variati e soprattutto esercizi di carattere pratico del tipo seguente:

1) È più conveniente comperare un litro di olio a L. 540 il litro o un kg. del medesimo a L. 580 il kg.?

2) Si possono versare 2 kg. di olio in un fiasco della capacità i 2 litri?

3) Pesa di più una bottiglia della capacità di un li-

tro piena di olio o la stessa piena di alcool? Che differenza c'è?

Un esercizio interessante è anche quello di determinare il peso specifico di un corpo di forma non geometrica, per esempio di... un ciottolo. Il problema si riduce a determinarne il volume dato che il peso si trova con la solita bilancia. Questa determinazione sarà trattata nel capitolo dei volumi (vedi pag. 159).

QUESTIONI DIDATTICHE
RELATIVE ALLE FIGURE GEOMETRICE PIANE

Lo studio delle figure geometriche, delle loro caratteristiche perimetrali e angolari, deve essere basato **essenzialmente su osservazioni ed esercitazioni pratiche.** Il maestro disegni e costruisca, faccia lavorare gli alunni nel disegno e nel ritaglio delle varie figure; ne faccia misurare i lati per cogliere le eventuali relazioni di uguaglianza; ne faccia misurare allo stesso scopo gli angoli, mediante il rapportatore (vedi nota a piè di pagina). Le caratteristiche delle singole figure dovranno essere ricavate dagli stessi scolari, sotto l'abile guida del maestro, attraverso il confronto diretto, convalidato dalle misurazioni.

Diamo uno schematico indirizzo sullo sviluppo delle

NOTA. – È facile far costruire agli alunni un rapportatore, adatto all'uso che possono farne, anche se grossolano: su apposito cartoncino si fa disegnare un rettangolo lungo cm. 12 e largo cm. 2 (vedi fig. 1): con centro in *O* si descrivono due semicirconferenze di raggi cm. 6 e cm. 4. Con l'aiuto

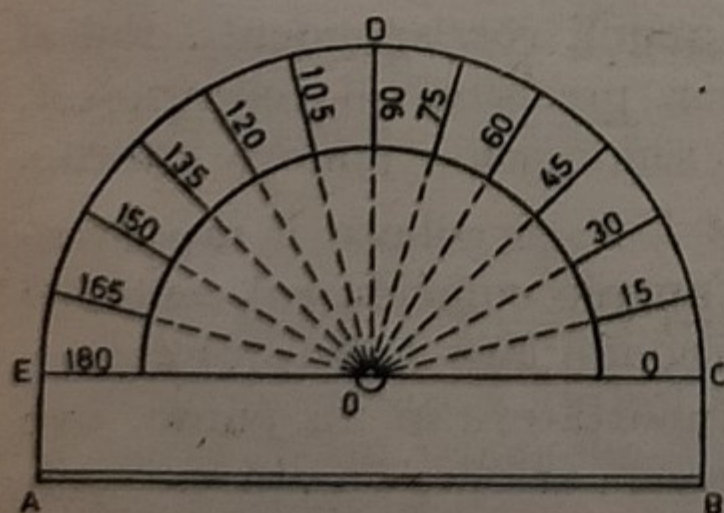
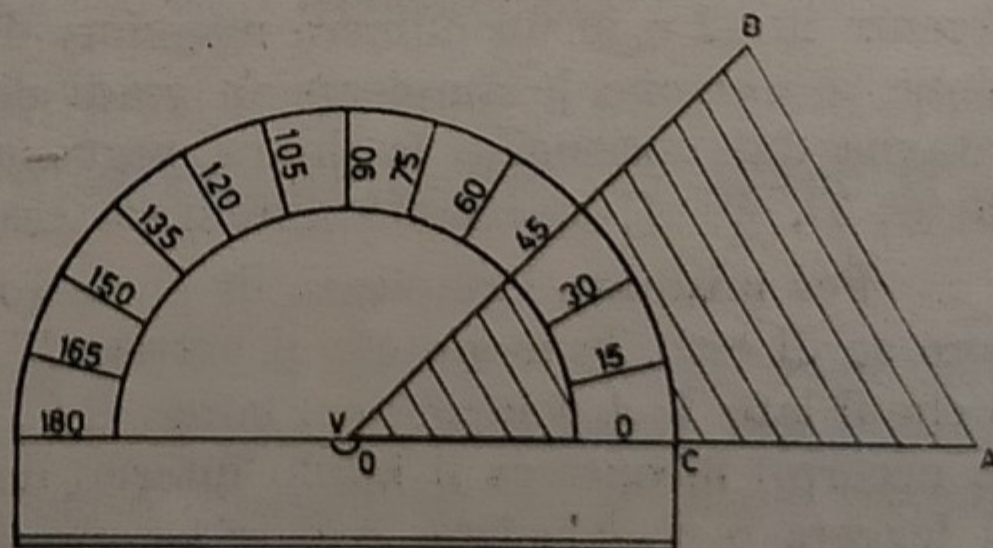



Fig. 1 Fig. 2

lezioni relative alle figure piane che si studiano nella scuola elementare.

Triangoli

Il maestro si prepari parecchi triangoli di varie dimensioni e di ogni tipo: scaleni, isosceli, equilateri, acutangoli, rettangoli, ottusangoli.

Li presenti tutti alla classe, invitando gli alunni a rilevare le caratteristiche comuni: 3 lati, 3 vertici, 3 angoli.

Successivamente li faccia differenziare per le diverse relazioni tra i lati; attraverso le necessarie misurazioni gli alunni osserveranno che alcuni triangoli hanno i lati tutti disuguali tra loro, altri li hanno tutti uguali, altri ancora ne hanno uguali solo due. I triangoli si possono così dividere in tre differenti gruppi: quello degli scaleni, quello degli equilateri e quello degli isosceli.

A questo punto sono molto utili, per fissare i concetti, i vari esercizi diretti e inversi relativi ai perimetri dei triangoli.

Eccone qualcuno di esempio:

1) In un triangolo un lato è cm. 4,8, un secondo è doppio del primo ed il terzo è la metà della somma dei primi due. Quanto misura ognuno dei lati? Quanto il perimetro?

---

di un rapportatore modello o del compasso, si dividono le due semicirconferenze in 12 o in un numero maggiore di archi uguali. Nei punti di divisione si scrivono le ampiezze in gradi degli angoli corrispondenti. Poi si ritaglia dal cartoncino la figura, seguendo con precisione il contorno *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *A*, staccando quindi da essa il semicerchio minore interno.

Per misurare l'ampiezza di un angolo *A V B*, si colloca il rapportatore su di esso, in modo che il vertice *V* dell'angolo coincida col centro *O* e che il lato *V A* coincida col bordo *O C*. Il secondo lato *V B* (prolungato, se occorre) incontrerà il bordo interno del rapportatore in un punto, ove si leggerà o si calcolerà, con una certa approssimazione, l'ampiezza dell'angolo *A V B* (vedi fig. 2).

2) In un triangolo isoscele la base è di cm. 6,3 e uno degli altri due lati è $\frac{2}{3}$ della base. Quanti decimetri è il perimetro?

3) Il perimetro di un triangolo è cm. 19,8; la base è cm. 7,8 e la somma della base con uno degli altri due lati è cm. 11,4. Quanto misura ognuno dei lati?

4) Il perimetro di un triangolo isoscele è cm. 6,4 e uno dei lati uguali è mm. 25. Quanti centimetri è lunga la base?

Osservazione. – Nel preparare i problemi di questo tipo, ricordare il teorema: in ogni triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due.

In seguito il maestro, sfruttando l'uso del rapportatore, farà constatare l'esistenza di triangoli con tre angoli tutti acuti, con un angolo retto e due acuti, con un angolo ottuso e due acuti; farà quindi raggruppare i triangoli presentati nelle tre categorie ormai note: acutangoli, rettangoli, ottusangoli.

A questo punto sarà bene introdurre il concetto di altezze di un triangolo, come segmenti uscenti da un vertice e perpendicolari al lato opposto.

Il maestro, per fissare questo concetto, non facile e tanto importante, darà ad ogni scolaro un triangolo acutangolo di carta e inviterà gli alunni a tracciare, con l'aiuto dei bordi di un quaderno, le tre altezze. Gli errori saranno molti; nella correzione di questi, il maestro troverà modo di chiarire il concetto e di far notare che, se il disegno è ben fatto, le tre altezze s'incontrano in uno stesso punto (vedi nota a piè di pag.).

Quando gli alunni dimostreranno di avere ben capito che cos'è l'altezza, il maestro proporrà di tracciare le

Nota. – In ogni triangolo le altezze passano per uno stesso punto, detto ortocentro: questo è interno al triangolo o esterno, secondo che si tratta di un triangolo acutangolo o ottusangolo: nel triangolo rettangolo l'ortocentro coincide col vertice dell'angolo retto.

altezze di un triangolo rettangolo, da lui disegnato alla lavagna. Molto probabilmente anche gli alunni che alzeranno la mano faranno dei pasticci: una delle altezze (quella relativa all'ipotenusa) sarà vista subito, ma le altre due.... L'interesse suscitato nei tentativi di risoluzione del problema grafico proposto, concorrerà senz'altro a fissare nella mente degli alunni il fatto curioso che le altre due altezze sono gli stessi due cateti (vedi fig. 2).

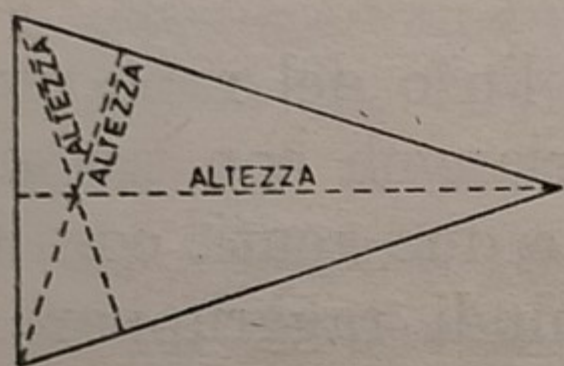
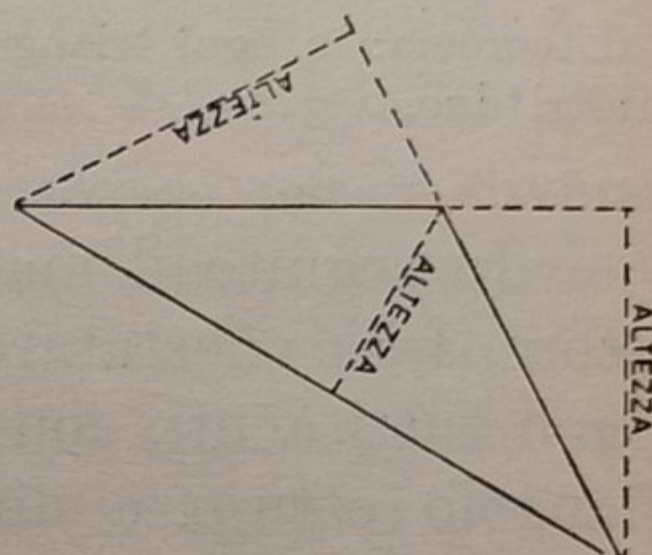
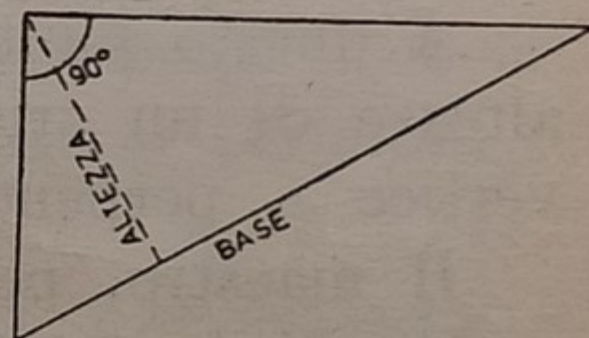
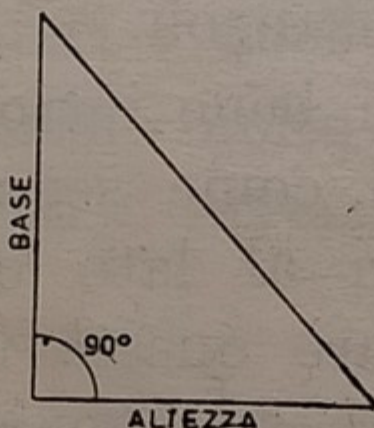
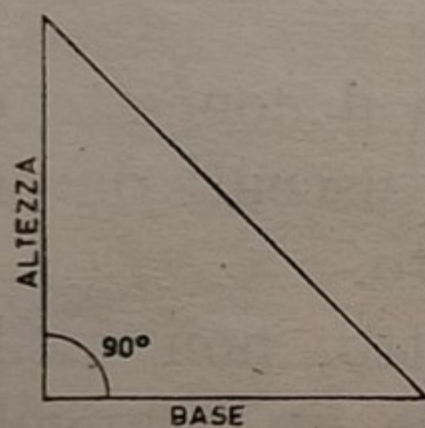



Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

Un'altra difficoltà notevole si presenterà poi quando gli alunni dovranno trovare e tracciare le altezze di un triangolo ottusangolo, disegnato dal maestro alla lavagna; essa verrà superata in modo analogo al precedente (vedi fig. 3).

Osservazione. – Molto diffusa nella scuola elementare è la tendenza di disegnare, a proposito della risoluzione di un problema, sempre e solo triangoli isosceli e di considerare come altezza solo quella relativa al lato disuguale (il quale, fra l'altro, viene sempre tracciato orizzontalmente!). Ciò contribuisce a radicare nella mente degli alunni due gravi errori:

1° che la base di un triangolo sia una sola e precisamente il lato orizzontale.

2° che l'altezza debba sempre dividere a base per metà.

Questi errori si fissano così tenacemente che, per la maggioranza dei casi, non bastano sette e più anni di scuola media e superiore ad estirparli radicalmente.

Anche per questo motivo raccomandiamo nuovamente la massima varietà degli esercizi grafici ed aritmetici relativi al triangolo.

Quadrilateri, trapezi, parallelogrammi

Come per i triangoli, il maestro presenterà alla classe numerosi quadrilateri, da lui preventivamente ritagliati da cartoncino apposito, di tutte le specie e di varie dimensioni.

Immediata per gli alunni sarà la constatazione che tutte queste figure hanno 4 lati, 4 vertici e 4 angoli.

Successivamente il maestro inviterà gli scolari a raggruppare tra loro quei quadrilateri che hanno due soli lati paralleli, tra loro quelli che hanno i lati paralleli a due a due e tra loro, infine, i rimanenti.

Così potrà dire che i quadrilateri del primo gruppo si chiamano più specificatamente « **trapezi** » e quelli del secondo gruppo « **parallelogrammi** ».

Per controllare se le caratteristiche di queste figure sono state colte, rimetterà in un sol gruppo tutti i quadrilateri e facendone estrarre uno per volta a caso, chiederà di quale figura si tratti e perchè.

In lezioni successive, quando i primi concetti saranno ben chiari, il maestro passerà allo studio dei parallelogrammi in particolare. Li presenterà tutti insieme (rettangoli e quadrati di varie dimensioni, parallelogrammi e rombi di varia forma ed estensione) ed inviterà gli alunni a misurare lati ed angoli di ogni figura, usando il righetto graduato o il metro a nastro ed il rapportatore.

Si arriverà così a constatare che caratteristiche comuni a tutti i parallelogrammi (vedi nota) sono:

1) l'uguaglianza dei lati opposti, a due a due.

2) l'uguaglianza degli angoli opposti, a due a due.

Qualche alunno, però, osserverà che alcuni parallelogrammi hanno uguali tutti e quattro i lati, altri hanno gli angoli tutti uguali e altri ancora hanno lati e angoli tutti uguali fra loro. Il maestro allora sfrutterà queste osservazioni, innanzi tutto per farne constatare l'esattezza ai compagni e poi per far scegliere, dal gruppo di tutti i parallelogrammi, quelli che hanno una delle caratteristiche osservate, onde raggrupparli nelle tre note categorie:

1) **dei rombi**

2) **dei rettangoli**

3) **dei quadrati.**

Verificherà poi il grado di acquisizione dei concetti con esercizi analoghi a quelli già visti per i quadrilateri (vedi pag. 119).

In lezioni successive, quando il maestro riterrà che questi concetti sono stati bene assimilati, passerà ad un confronto più approfondito dei vari tipi di parallelogrammi.

Così, metro alla mano, farà constatare che, mentre nel rettangolo e nel quadrato le diagonali sono uguali,

---

Nota. – Va ricordato, a questo proposito, che i libri di testo per scuole elementari dànno spesso questa definizione: « il parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli e uguali a due a due ». Tale definizione è impropria: intanto può far pensare che un quadrilatero coi lati opposti semplicemente paralleli a due a due non sia un parallelogramma; inoltre impone due condizioni (uguaglianza e parallelismo dei lati) che sono una conseguenza dell'altra: in altre parole un quadrilatero che ha i lati paralleli a due a due, li ha anche uguali e viceversa, come facilmente si dimostra in geometria.

ciò non è per tutti gli altri parallelogrammi, rombo compreso, che hanno una diagonale più lunga dell'altra.

Analogamente, col rapportatore, farà verificare che, mentre nel rombo e nel quadrato le diagonali sono perpendicolari dividendosi ad angolo retto, questo non succede nel rettangolo e in tutti gli altri parallelogrammi.

A questo punto, per meglio fissare le nozioni acquisite, sarà molto utile esercitare gli alunni con problemi di carattere perimetrale, diretti e inversi, dei quali diamo alcuni esempi:

1) Un lato di un parallelogramma è lungo cm. 12,5, un altro è $\frac{2}{3}$ del primo; quanto è lungo il perimetro?

   Questo perimetro è lungo quanto, insieme, le due diagonali di un rettangolo.

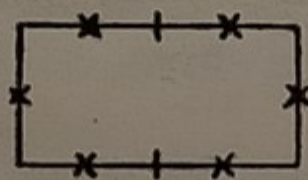
   Quanto sarà lunga ciascuna diagonale di quel rettangolo?

2) La somma delle diagonali di un quadrato è cm. 29; una di esse è lunga come un lato di un certo rettangolo, nel quale un altro lato è $\frac{3}{5}$ del primo.

   Quanto è lungo il perimetro del rettangolo?

3) Il perimetro di un parallelogramma è cm. 36; un suo lato è lungo come quello di un rombo che ha il perimetro di dm. 4,08.

   Quanto sono lunghi i lati del parallelogramma?

4) Il perimetro di un rettangolo è cm. 54; un suo lato è doppio dell'altro. Quanto misura ognuno dei lati? (se gli alunni trovano difficoltà, il maestro faccia loro disegnare il rettangolo, in modo che sia molto evidente il fatto che un lato sia doppio dell'altro, così:

Osservazione. – Molto frequentemente nei libri di testo per scuole elementari si incontra il termine «romboide» per designare quei parallelogrammi che non sono nè rettangoli, nè rombi, nè quadrati.

Questa specificazione non è esatta, perchè può far pensare che i sunnominati « romboidi » abbiano qualche caratteristica speciale rispetto ai comuni parallelogrammi, compresi quelli particolari sopraddetti: ciò non è vero.

Il termine « romboide » può essere accettato solo come sinonimo di « parallelogramma » ed in tal caso anche i rettangoli, i rombi, i quadrati sono romboidi.

Poligoni regolari

Le due caratteristiche di un poligono regolare (lati uguali ed angoli uguali) sembrano di facile acquisizione; invece l'esperienza didattica rivela che, mentre l'uguaglianza dei lati è colta subito e non più dimenticata, quella degli angoli sfugge quasi sempre.

Il maestro quindi dovrà svolgere la lezione in modo da condurre gli alunni alla spontanea considerazione che l'uguaglianza degli angoli è indispensabile per decidere se un poligono a lati uguali è regolare oppure no.

Sfrutterà a tal fine le conoscenze che gli scolari già hanno, partendo dal quadrato. Costruitone uno a lati articolati (è facile), dopo averlo presentato agli allievi, lo faccia deformare. Subito i ragazzi noteranno che la nuova figura, pur avendo gli stessi lati della prima, non è più un quadrato, ma un rombo.

MAESTRO. – Come mai, se i lati non sono cambiati?

ALUNNI. – Sono cambiati gli angoli: due si sono allargati e due si sono ristretti.

MAESTRO. — Prima, invece, come erano?

ALUNNI. – Tutti uguali fra loro.

MAESTRO. – Il quadrato che ha tutti i lati uguali fra loro e gli angoli pure uguali fra loro, si chiama « *poligono regolare* ».
Il rombo *non* è un poligono regolare.
E il rettangolo?

Alunni (*in maggioranza*). – Non è regolare perchè ha due lati lunghi e due corti.

Maestro. – E fra i triangoli, ne esiste qualcuno regolare?

Perplessità generale; poi qualcuno tra i più svelti cita il triangolo equilatero.

Maestro. – Perchè?

Alunni. – Perchè ha tre lati tutti uguali!

Maestro. – Già, e il rombo non ha i lati uguali? Però non è regolare.

La perplessità aumenta ed il maestro, sagacemente sfruttando l'interesse suscitato, porterà i più svegli a dire che è necessario controllare se gli angoli del triangolo equilatero sono uguali, per decidere della sua regolarità.

La verifica è facile: si può eseguire o col rapportatore, su una figura che il maestro ha precedentemente preparato, o ripiegando questa, se è di carta, lungo un'altezza prima (combaciano due dei 3 angoli) e poi lungo un'altra altezza (combaciano altri due dei 3 angoli).

La lezione si completa col disegnare alla lavagna un esagono equilatero, ma non equiangolo, di questo tipo:

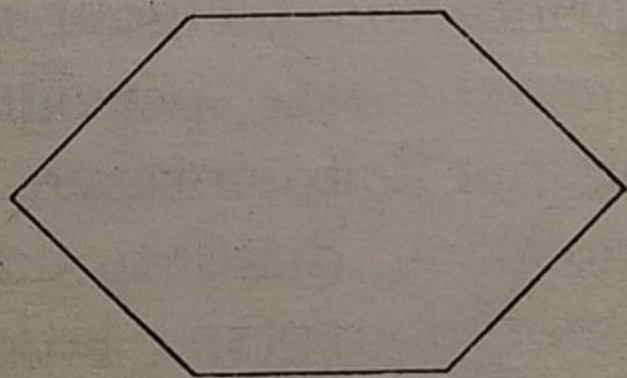



Fig. 6

(il maestro, mentre disegna, si serve di una strisciolina di carta, lunga come il lato della figura, in modo che già nell'esecuzione del disegno, risulti evidente l'uguaglianza dei lati).

Maestro (*mostrando la figura*). – Secondo voi, questo poligono è regolare oppure no?

Moltissimi risponderanno di si; qualcuno non saprà cosa dire e forse qualcuno dirà di no. L'esame delle risposte, con la discussione relativa, porterà senz'altro alla considerazione che la questione può essere decisa, solo dopo aver misurato i sei angoli.

Eseguite le misurazioni, tutti converranno che l'esagono disegnato non è regolare.

A questo punto, facendo uso del compasso, si costruirà un esagono regolare; però si arriverà a decidere della sua regolarità, solo dopo le convenienti misurazioni.

Ormai il concetto di poligono regolare dovrebbe essere chiaro nella mente degli alunni, al punto da poterlo estendere a un poligono di qualsiasi numero di lati.

Il maestro potrà controllare ciò con un utile esercizio di carattere pratico, da effettuarsi in lezioni successive.

Dato ad ogni alunno un cartoncino col disegno di un poligono di un certo numero di lati (diverso da alunno ad alunno), poligono che può essere regolare o no (triangolo, quadrato, rombo, rettangolo, pentagono, esagono, ottagono e decagono), il maestro farà scrivere sul cartoncino se il poligono disegnato è regolare o irregolare.

Girando tra i banchi, egli esigerà che tali attributi vengano scritti a ragion veduta, cioè dopo le opportune misurazioni. Gli errori verranno corretti collettivamente.

In un'altra lezione il maestro provvederà a far notare l'importante proprietà dei poligoni regolari, per cui esiste, per ognuno di essi, un punto interno detto centro, equidistante da tutti i vertici e da tutti i lati; definirà quindi l'apotema e il raggio. La determinazione del centro può essere fatta praticamente, con una certa facilità, nei poligoni aventi un numero pari di lati, con due successive ripiegature del poligono stesso (ritagliato in carta) lungo due delle massime diagonali, come si vede in figura.

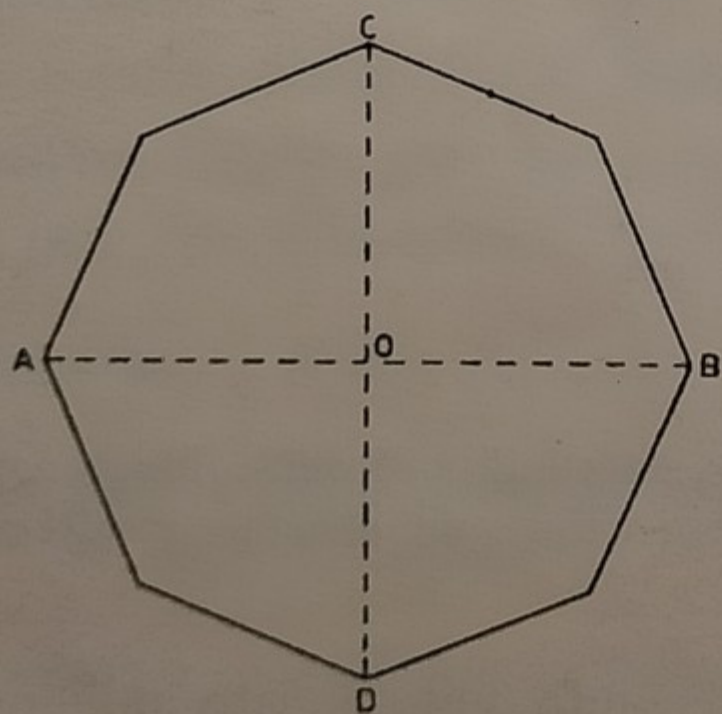



Fig. 7

Prima si ripiega il poligono su se stesso lungo la diagonale $A\ B$, poi lungo

la diagonale $C D$ (in modo cioè che B coincida con A): il punto d'incrocio delle due ripiegature è il centro.

Trovato il centro, gli alunni con le opportune misurazioni constateranno:

1) che le distanze del centro dai vertici (**raggi**) sono tutte uguali.

2) che i segmenti di perpendicolare condotti dal centro ai lati (**apotemi**) sono tutti uguali.

3) che gli apotemi dividono ogni lato per metà.

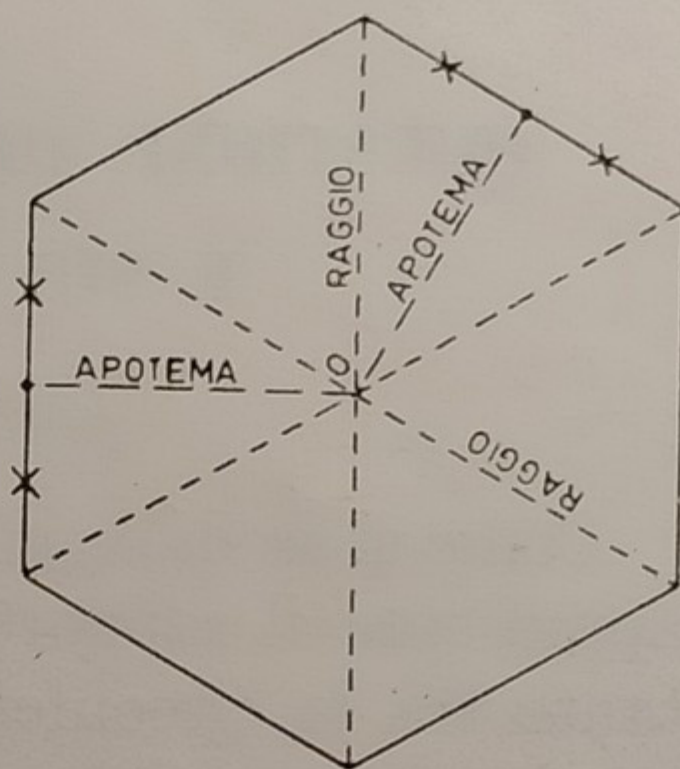



Fig. 8

Circonferenza e Cerchio

Queste figure geometriche, che materialmente possono essere concretate in un sottile anello (**circonferenza**) e in un disco di spessore trascurabile (**cerchio**), non presentano alcuna difficoltà d'intuizione; la constatazione dell'esistenza del centro e dell'uguaglianza dei raggi è immediata. Per il concetto, notevolmente difficile nonostante le apparenze, di circonferenza rettificata (vedi nota) e della sua misura (perimetro del cerchio) si veda il capitolo seguente.

NOTA. – Si ricorda che, dato un cerchio, la sua circonferenza rettificata è quel segmento la cui lunghezza è l'elemento di separazione fra le classi contigue dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio dato.

In altre parole è quel segmento che è più lungo di tutti i perimetri dei poligoni inscritti e più corto dei perimetri dei poligoni circoscritti.

QUESTIONE DIDATTICA SUL NUMERO π E SUI «NUMERI FISSI»

Come si sa dalla geometria, col simbolo π (pi greco) si rappresenta il rapporto (vedi nota a piè di pag. 127) costante tra la circonferenza rettificata e il suo diametro. Questo rapporto è un numero irrazionale (vedi nota pag. 127) avente cioè infinite cifre decimali, ma non periodico. Nella pratica, perciò, si usano di esso solo valori approssimati; in particolare, nella scuola elementare, viene usato il valore approssimato per difetto a meno di un centesimo, che è 3,14.

Il punto più delicato della questione non è quello di fissare nella mente degli alunni questo valore (3,14), ma il far capire il significato di tale numero che non muta, qualunque sia la circonferenza, grande o piccola.

La sottigliezza dell'argomento e la sua importanza ci inducono a presentare uno schema di lezione orientativa.

Lezione su π

Materiale didattico occorrente: tanti dischi di cartoncino, uno per ogni alunno, di diametri diversi, le cui lunghezze oscillino tra gli 8 e i 20 centimetri; una funicella per alunno, lunga circa un metro; ogni alunno deve inoltre disporre del proprio metro a nastro (costruito in terza classe, vedi pag. 99).

Il maestro distribuisce dischi e funicelle ed invita quindi gli alunni a contornare il proprio disco con la propria funicella.

Insiste sulla necessità di procedere con molta precisione; fa mettere con la penna un segno nei punti in cui la funicella si chiude intorno al disco (vedi figura):

Fig. 9

NOTA. – Per dare una definizione di rapporto fra due grandezze (omogenee), conviene distinguere se le grandezze considerate sono commensurabili, oppure no. Ricordiamo che due grandezze sono commensurabili quando si può trovare una terza grandezza, omogenea con esse, che sia sottomultipla di entrambe; in caso contrario le grandezze considerate si dicono incommensurabili. Sono coppie di grandezze incommensurabili il lato e la diagonale di uno stesso quadrato, il lato e l'altezza di uno stesso triangolo equilatero, il diametro e la circonferenza rettificata di uno stesso cerchio. Date allora due grandezze *commensurabili*, A e B, si definisce rapporto di A rispetto a B il numero *razionale* m/n il quale esprime che A è multipla secondo m della sottomultipla secondo n della grandezza B, cioè che $A = m\left(\frac{1}{n} B\right)$.

Ciò si esprime sinteticamente scrivendo: $A = \frac{m}{n} B$.

Date invece due grandezze *incommensurabili* C e D, si definisce rapporto di C rispetto a D, il numero *irrazionale* α, elemento di separazione fra le due classi contigue di numeri razionali $\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right)$ per i quali siano verificate le relazioni:

$$\frac{m}{n} D < C \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} D > C.$$

In pratica i numeri delle due classi contigue che permettono d'individuare α, si trovano con la misurazione decimale di C rispetto a D, presa D come unità di misura e sono numeri decimali finiti: quelli della prima classe sono i valori approssimati per difetto di α, quelli della seconda classe ne sono i valori approssimati per eccesso.

controlla il lavoro eseguito, corregge gli eventuali errori; quindi fa tendere la funicella, facendo rilevare che il tratto di essa, teso fra i due segni fatti a penna, non è altro che il contorno rettificato del disco (circonferenza rettificata).

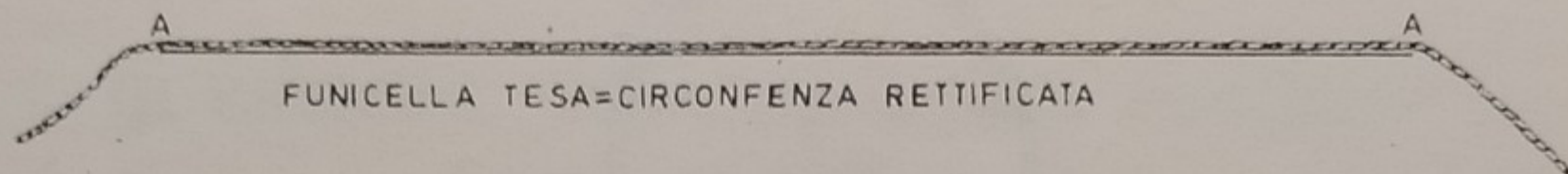



Fig. 10

A questo punto il maestro fa misurare sulla funicella la lunghezza della circonferenza rettificata e, fatto ripiegare il disco su se stesso, in modo che le due metà combacino perfettamente, fa misurare su di esso il diametro ottenuto. Invita quindi gli alunni ad eseguire sul proprio quaderno la divisione fra i due numeri ottenuti rispettivamente nella prima e nella seconda misurazione, fino ad ottenere un quoziente con due cifre decimali (vedi nota I a pag. 129).

Gli alunni lavorano, così, ognuno per proprio conto, perchè hanno numeri diversi, essendo diversi i cartoncini distribuiti.

Il maestro, girando tra i banchi, controlla e corregge le operazioni dei ragazzi, aiutando i più lenti; poi, quando tutti hanno finito, comincia a chiedere a uno, poi a un altro, poi a un altro ancora il risultato ottenuto. Il primo risponde: « 3,14 »; il secondo pure e così il terzo. A questo punto già tutti gli alunni dànno manifesti segni di impazienza, per comunicare la scoperta che hanno ottenuto lo stesso risultato, pur avendo operato su dischi diversi.

Questo è proprio il nocciolo della questione e il maestro sfrutterà al massimo lo stupore e l'interesse suscitato per radicare nella mente degli alunni che, qualunque sia il cerchio, accade *sempre* che:

lunghezza circonferenza : *lunghezza diametro* = 3,14

da cui è facile far ricavare che:

lunghezza circonferenza = *lunghezza diametro* × 3,14.

Di immediata deduzione è poi l'altra relazione, molto usata:

lunghezza circonferenza = *lunghezza raggio* × 6,28.

« Numeri fissi » relativi ai poligoni regolari

La questione inerente ai « numeri fissi », come vengono chiamati nelle scuole elementari i rapporti costanti fra gli apotemi e i lati dei poligoni regolari, può essere trattata analogamente a quella su π; però la maggiore facilità delle misurazioni pratiche e la già constatata possibilità di quozienti costanti (vedi nota a piè di pagina) fra termini variabili, rendono la lezione più semplice, tanto che il maestro può svolgerla completamente su disegni da lui preparati alla lavagna.

Così, per esempio, volendo dar ragione del numero fisso 0,866, relativo all'esagono regolare, il maestro disegnerà alla lavagna tre esagoni regolari di diversa estensione.

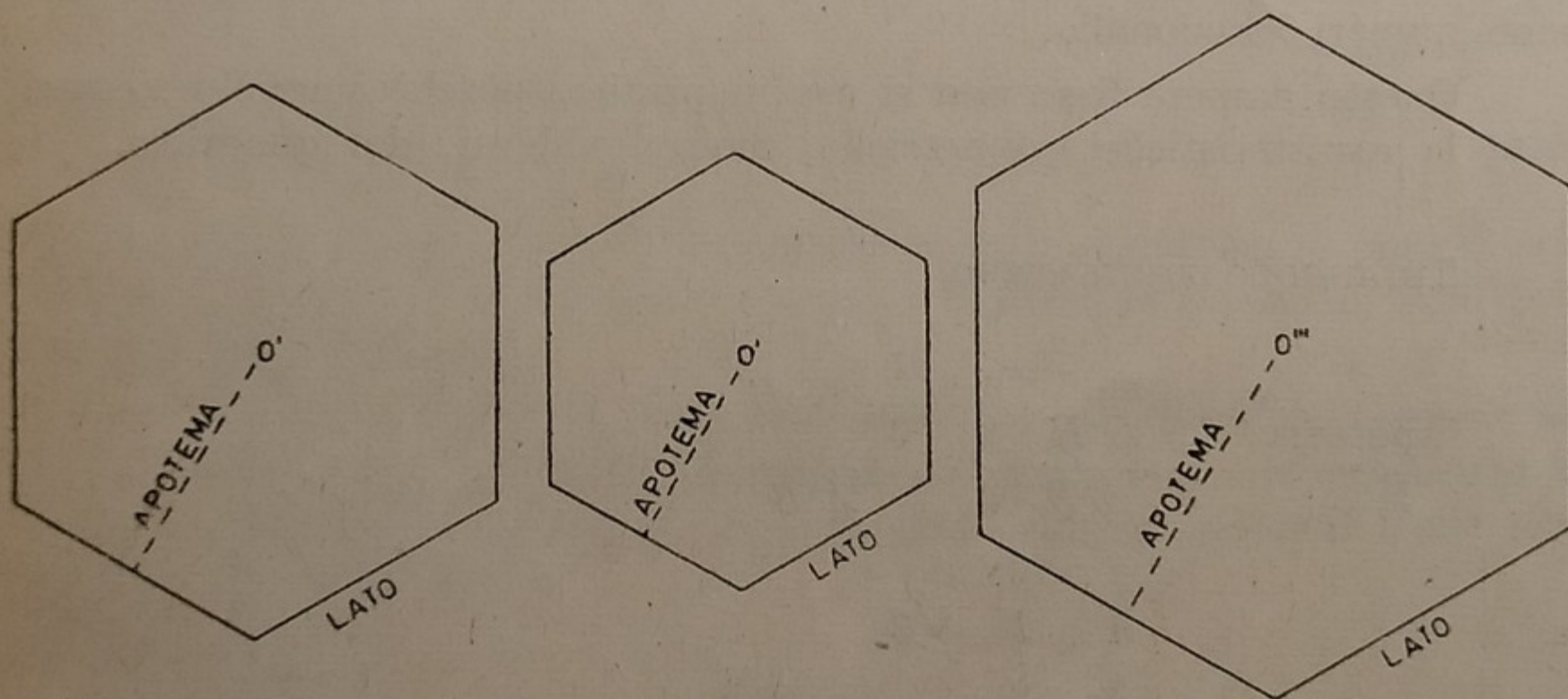



Fig. 11

Farà misurare dagli alunni l'apotema e il lato di ogni esagono e farà eseguire fino alla terza cifra deci-

---

NOTA I. – In questa lezione, come in quella su π, si sfrutta il teorema per cui il rapporto fra due grandezze è uguale al quoto delle loro misure, riferite a una stessa unità di misura.

Le operazioni effettuate, i simboli usati e i risultati ottenuti, non sono strettamente rigorosi: l'assoluto rigore urta contro difficoltà teoriche e tecniche, che, per una scuola elementare, sono troppo gravi, come ciascuno sa dallo studio della geometria razionale.

male la divisione fra le 3 coppie di numeri trovati. Se le misurazioni saranno accurate, i tre quozienti saranno uguali a 0,866, per cui sarà facile dedurre che, per qualunque esagono regolare:

$$\text{apotema} : \text{lato} = 0{,}866$$

e quindi che:

$$\text{apotema} = \text{lato} \times 0{,}866$$

Analogamente si può procedere per la determinazione dei numeri fissi relativi agli altri poligoni regolari.

NOTA I. – I « *numeri fissi* » usati nella scuola elementare non sono che i valori approssimati per difetto dei rapporti, calcolati in geometria, fra apotema e lato di un poligono regolare o di qualunque altro avente lo stesso numero di lati (*simile*): tali rapporti, fatta eccezione del quadrato sono numeri irrazionali.

Questo numero fisso non si usa in pratica, perchè non è necessario date le caratteristiche geometriche, molto evidenti, del quadrato.

TRIANGOLO EQUILATERO

$$\frac{\text{apotema}}{\text{lato}} = \frac{OH}{AB} = \frac{\frac{1}{3}\,CH}{AB} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\,\frac{l}{2}\,\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{1{,}732...}{6} = 0{,}288...$$

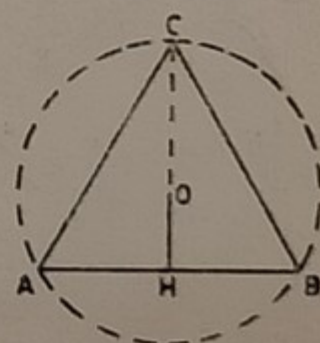



Fig. 12

QUADRATO

$$\frac{\text{apotema}}{\text{lato}} = \frac{OH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}\,A\,B}{AB} = \frac{1}{2} =$$

$$= 0{,}5.$$

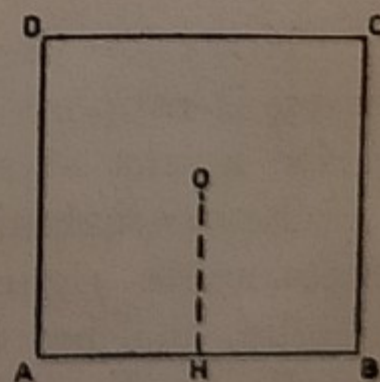



Fig. 13

Esagono regolare

$$\frac{\text{apotema}}{\text{lato}} = \frac{O\,H}{A\,B} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{l} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1{,}732...}{2} =$$

$$= 0{,}866...$$

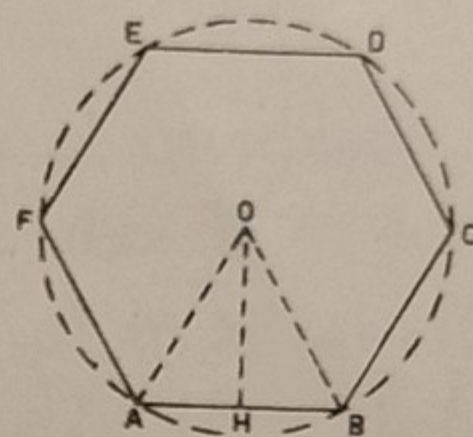



Fig. 14

Decagono regolare

$$\frac{\text{apotema}}{\text{lato}} = \frac{O\,H}{A\cdot B} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{l} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} =$$

$$= 1{,}538...$$

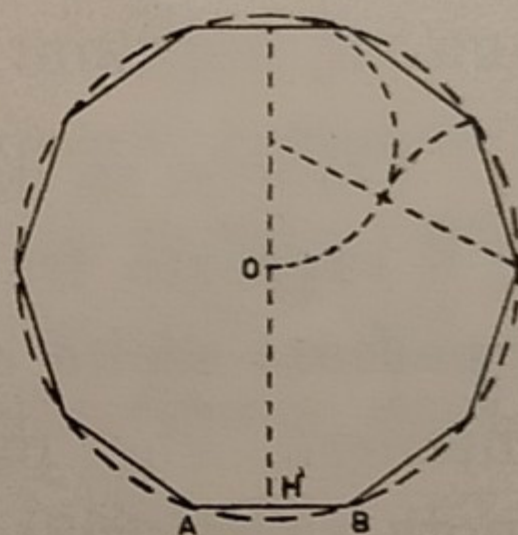



Fig. 15

Analogamente, ma con procedimenti più complessi, si possono ricavare i numeri fissi relativi al pentagono (0,688), all'ottagono (1,207) e al dodecagono regolari.

I poligoni regolari di sette e di nove lati non dovrebbero essere presi in considerazione, perchè in pratica non si usano mai e in geometria presentano difficoltà tali, per cui non vengono studiati neppure nelle scuole medie superiori.

QUESTIONI DIDATTICHE SULLE AREE DELLE SUPERFICIE DEI POLIGONI E DEL CERCHIO

Come si sa dalla geometria, l'**area** di una figura piana è **il rapporto fra la superficie di tale figura e quella del quadrato scelto come unità di misura**; tale rapporto è un numero, che può essere razionale o irrazionale (vedi nota a pag. 127) secondo che la figura data è commensurabile oppure no con l'unità di misura scelta.

Risulta evidente quindi che il concetto di **area** di una figura è ben distinto da quello della sua **superficie**: **questa è una grandezza definita esclusivamente dalla sua estensione** e quindi assolutamente indipendente dall'unità di misura scelta; *quella* è un numero dipendente dall'estensione della figura e dall'unità di misura scelta, per cui varia al variare di quest'ultima.

Esempio:

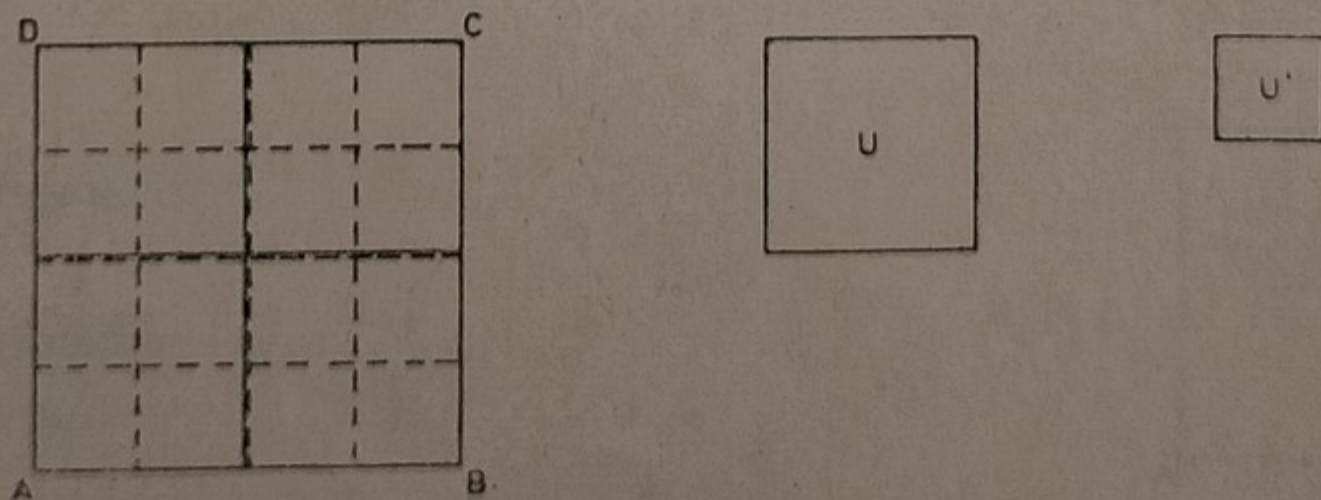



Fig. 16

Superficie del quadrato $ABCD$ = parte di piano limitata dal suo contorno.

L'area del quadrato $ABCD$ rispetto al quadrato U preso come unità di misura è 4; infatti $ABCD = 4\ U$.

L'area del quadrato $ABCD$ rispetto al quadrato U' preso come unità di misura è 16; infatti $ABCD = 16\ U'$.

Nella scuola elementare, esclusi i casi del cerchio e dei poligoni regolari, si trattano solo problemi relativi a superficie commensurabili con l'unità di misura (m.^{2}) e quindi anche con i suoi sottomultipli e multipli, per cui l'**area sarà sempre espressa da un numero razionale**, la cui determinazione si ridurrà a ricercare **quante volte il metro quadrato**, **o un suo sottomultiplo** (dm.^{2}, cm.^{2}, mm.^{2}), **è contenuto nella superficie della figura data.**

Tale ricerca, in pratica, si limita al rettangolo, perchè le aree degli altri poligoni (parallelogrammi generici, quadrato, triangolo, rombo, trapezi, ecc.) si riconducono a quella del rettangolo, sfruttando i noti teoremi sull'equivalenza (uguaglianza di estensione) tra figure piane.

Diamo brevi cenni illustrativi, caso per caso.

Rettangolo

Il maestro ha fatto preparare a ogni scolaro un rettangolo lungo cm. 6 e largo cm. 5; ha fatto preparare anche a ognuno un certo numero di quadratini col lato di cm. 1.

Il maestro fa collocare il rettangolo sullo scrittoio e fa prender nota delle sue dimensioni.

Poi invita gli alunni a disporre dentro al proprio rettangolo, appoggiati sulla base, uno consecutivamente al-

l'altro, tutti i quadratini che si possono mettere, come in fig. 17 e 18.

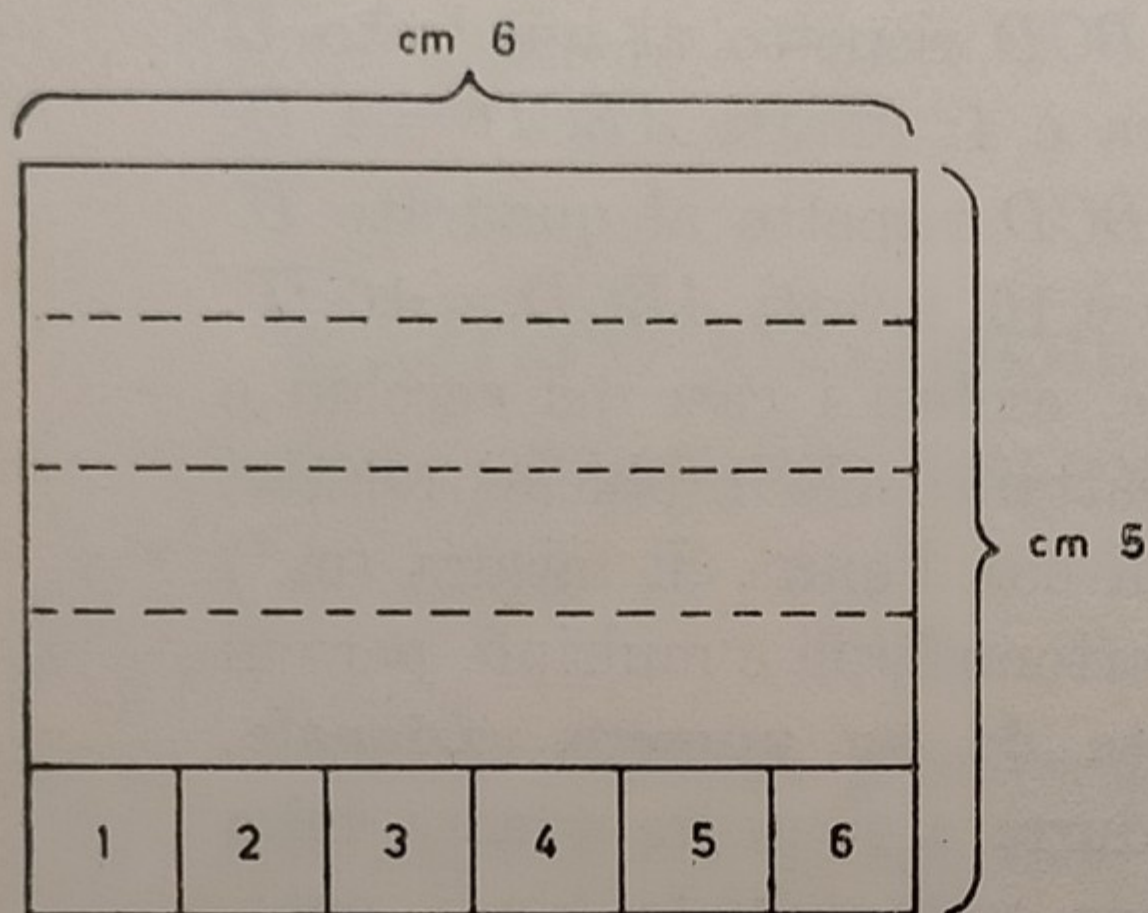



Fig. 17

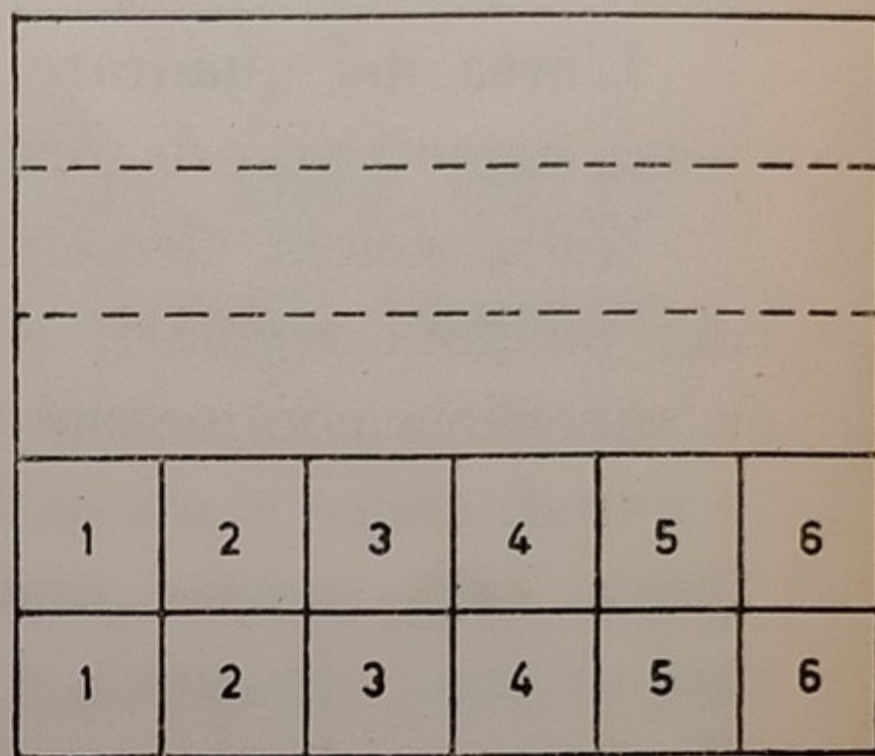



Fig. 18

Successivamente sopra alla prima striscia ne fa collocare una seconda, come in fig. 2. A questo punto il maestro domanda agli alunni quanti quadratini di 1 cm.^{2} occorrono in tutto per ricoprire il rettangolo.

I più svelti alzeranno la mano per rispondere: « Trenta! ». Alcuni non sapranno cosa dire; a costoro, prima di decidere se il numero trenta va bene, il maestro consiglierà di disporre sopra alle precedenti una terza striscia di quadratini ed, eventualmente, una quarta. Così molti altri alunni arriveranno a confermare il risultato visto dai primi.

Il maestro può ora chiedere ragione del numero detto; ne nasce una specie di discussione, che, abilmente condotta, porta gli alunni a constatare che il numero complessivo dei cm.^{2} occorrenti a ricoprire il rettangolo, è dato dal prodotto del numero di quelli contenuti in una striscia, per il numero delle strisce contenute nel rettangolo.

Ma il numero dei cm.^{2} di una striscia non è che la

misura della base e il numero delle strisce è la misura dell'altezza, per cui il numero totale dei cm.^{2} contenuti nel rettangolo è uguale alla misura della base moltiplicata per quella dell'altezza. D'altra parte tale numero esprime l'area del rettangolo; quindi si può concludere:

area rettangolo = misura base × misura altezza

Per fissare meglio la lezione, il maestro farà disegnare sul quaderno un rettangolo a piacere, con dimensioni espresse da un numero intero di cm.; ne farà calcolare l'area. A coloro che sbaglieranno o agli incerti il maestro farà ripetere l'esperienza precedente, facendo ricoprire i rispettivi rettangoli con i quadratini occorrenti.

L'estensione della formula trovata al quadrato è immediata; basta far riflettere gli alunni sul fatto che il quadrato può considerarsi un rettangolo avente la base uguale all'altezza, per cui essi deducono facilmente che:

area quadrato = misura lato × misura lato =
= misusa lato moltiplicata per se stessa.

Parallelogramma

Il teorema: « un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo di ugual base e uguale altezza » e la sua dimostrazione indicano al maestro la via da seguire per insegnare agli alunni come si trova l'area di un parallelogramma.

Eccone la figura illustrativa:

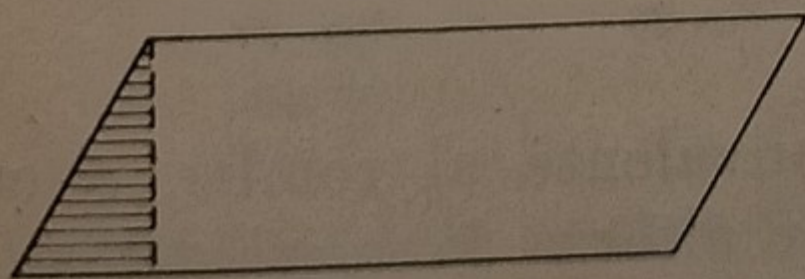
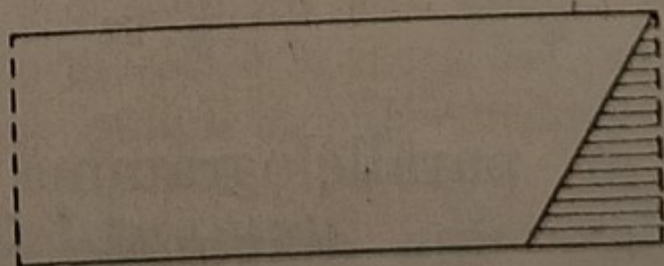



Fig. 19 Fig. 20

Disegnato e ritagliato dal cartoncino il parallelogramma e tracciato il segmento di perpendicolare (altezza) da un vertice sul lato opposto, si faccia staccare il triangolo che ne risulta.

Trasportato il triangolo come in fig. 20, è facile far constatare che si ottiene un rettangolo, che ha base, altezza ed estensione uguali a quelle del parallelogramma.

Perciò si può concludere:

Area del parallelogramma = Area rettangolo

e quindi

Area parallelogramma = misura base × misura altezza.

Rombo

Il rombo è un parallelogramma, (fig. 21), per cui vale per esso la formula già trovata per il parallelogramma:

Area rombo = misura base × misura altezza

Ma l'area del rombo si può calcolare anche per mezzo delle diagonali, che in esso sono perpendicolari (fig. 22). Infatti, ritagliato un rombo da un cartoncino e divisolo poi lungo una delle diagonali (fig. 23), si ottengono due triangoli uguali; disposti questi come in (fig. 24), si for-

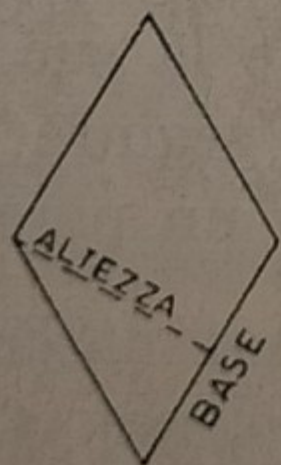
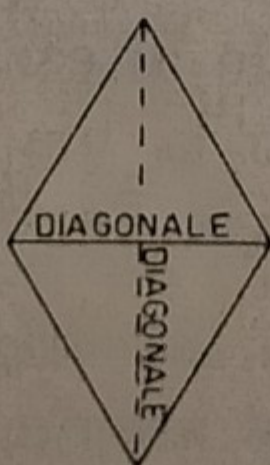
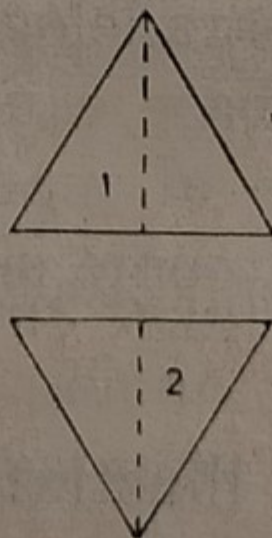
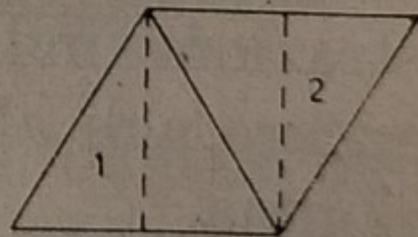



Fig. 21 Fig. 22 Fig. 23 Fig. 24

ma un parallelogramma equivalente al rombo, avente perbase una diagonale e per altezza la metà dell'altra; si può quindi concludere che:

area rombo = area parallelogramma = misura diagonale × misura metà dell'altra,

cioè

area rombo = misura diagonale × ½ misura altra diagonale.

Questa formula può essere applicabile anche al quadrato, che è uno speciale rombo e consente di calcolarne l'area, conoscendo la misura della diagonale; si ha infatti:

area quadrato = area rombo =
= misura diagonale × ½ misura diagonale
= misura diagonale × se stessa : 2.

Fig. 25

Triangolo

Si procede, analogamente al parallelogramma, sfruttando il teorema: « un triangolo è equivalente alla metà di un parallelogramma di ugual base e uguale altezza ».

Fig. 26

Ritagliato il parallelogramma lungo il contorno e lungo la diagonale segnata (fig. 26), sarà molto facile constatare con la sovrapposizione che i triangoli 1 e 2 sono fra loro uguali, per cui ciascuno di essi è la metà del parallelogramma; quindi si può concludere:

(1) **area triangolo = area parallelogramma : 2 =**
= misura base × misura altezza : 2.

Osservazione. – Si usano spesso le seguenti formule:

area triangolo = misura metà base × misura altezza
area triangolo = misura base × misura metà altezza.

Le quali si possono dedurre dalla (1), ricordando la proprietà per cui dovendo dividere un prodotto per un numero, si può dividere per quel numero uno o l'altro dei fattori e moltiplicare poi il quoziente per l'altro; oppure si possono ricavare da teoremi di equivalenza, illustrati dalle figure 27 e 28:

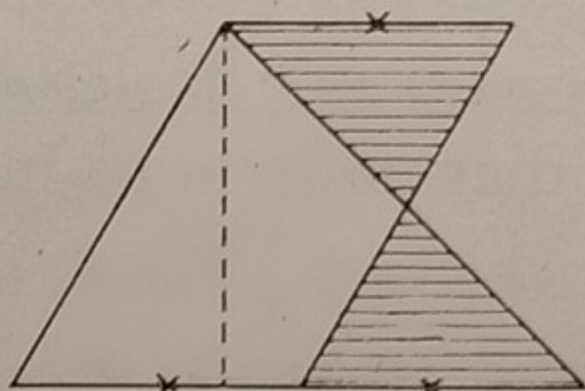
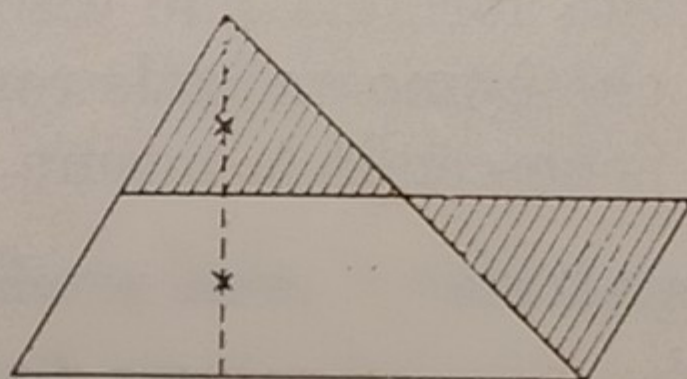



Fig. 27 Fig. 28

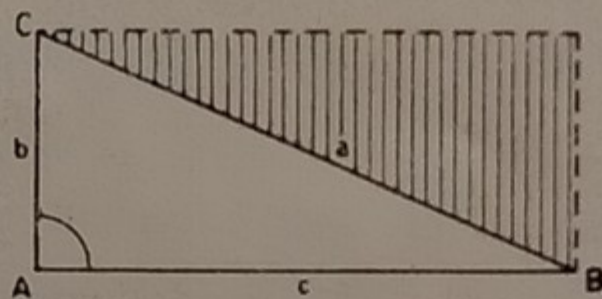
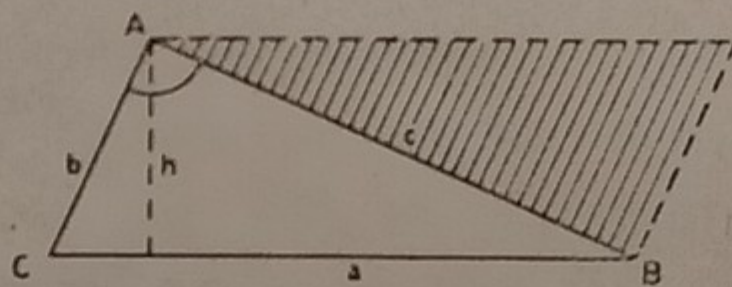
Nel caso particolare del triangolo rettangolo è bene far notare che la sua area si può calcolare sia per mezzo delle misure dei cateti, che per mezzo delle misure dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa, come si deduce dalle figure 29 e 30.

misura BC = a misura AC = b misura AB = c

Fig. 29 Fig. 30

area triangolo rettangolo $ABC = b \times c : 2$
area triangolo rettangolo $ABC = a \times h : 2$

Trapezio

Per questa figura si procede applicando il seguente teorema: « un trapezio è equivalente a un triangolo di uguale altezza, avente per base la somma delle sue basi ».

Si sa dalla geometria che il punto O della fig. 31 è

il punto medio del lato obliquo del trapezio; allora il maestro, ritagliato il trapezio lungo il contorno, con-

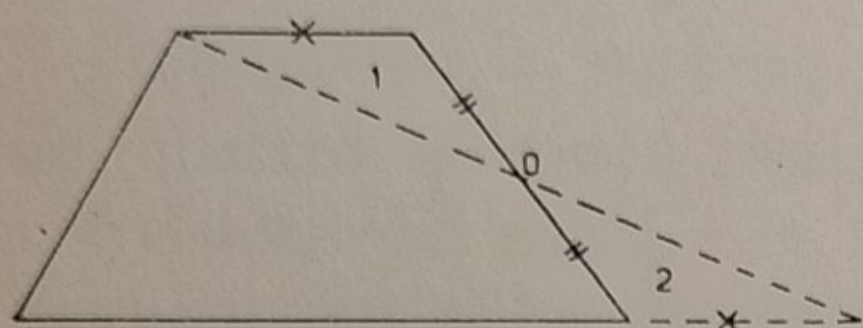
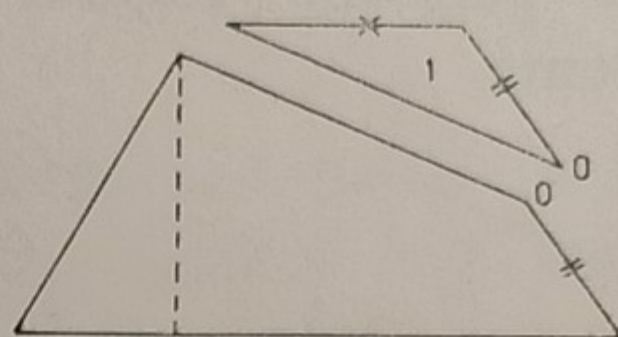



Fig. 31 Fig. 32

giunto il punto *O* con l'estremo opposto della base minore, tagli la figura lungo questo segmento; staccherà il triangolo 1, come nella figura 32 e lo porterà come in figura 33, nella posizione del triangolo 2, facendo com-

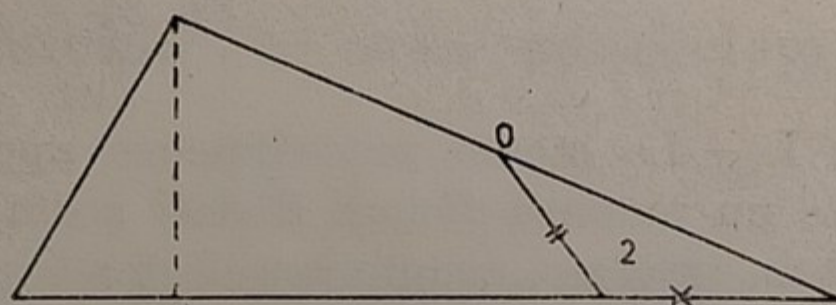



Fig. 33

baciare le due metà del lato obliquo. Otterrà così un triangolo di superficie uguale a quella del trapezio, avente altezza uguale a quella del medesimo e avente per base la somma della base maggiore con la base minore.

Area trapezio = misura somma basi × misura altezza : 2

Poligono regolare

Si disegna e si ritaglia un poligono regolare (consigliabili l'esagono e l'ottagono); congiunto il centro con tutti i vertici, si ritaglia la figura lungo i raggi. Si dispongono poi i triangoli ottenuti come in fig. 35.

Si ottiene un parallelogramma, evidentemente di superficie uguale a quella del poligono, avente per altezza

l'apotema dello stesso e per base la metà del suo perimetro, per cui è facile concludere che:
Area poligono regolare = semiperimetro × misura apotema.

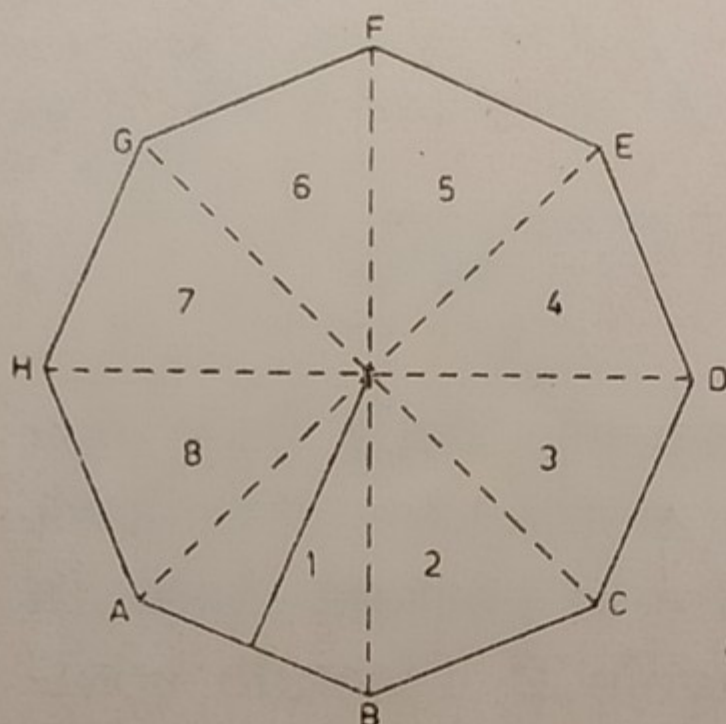
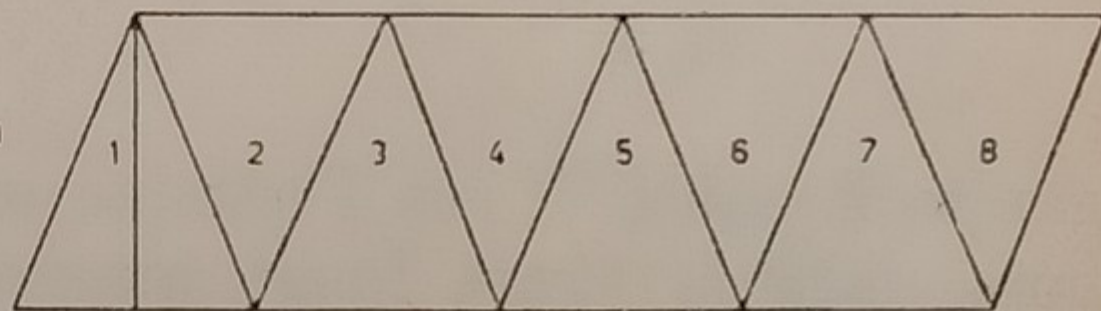



Fig. 34 Fig. 35

Osservazione I. – Lo stesso procedimento applicato ad un poligono regolare avente un numero dispari di lati porta, invece che ad un parallelogramma, ad un trapezio, avente per altezza l'apotema del poligono e per somma delle basi il suo perimetro, per cui la conclusione è la stessa.

Osservazione II. – Come si è visto nell'apposito capitolo (vedi pag. 129), tra apotema e lato di ogni poligono regolare intercede un rapporto costante, rispetto all'estensione e dipendente solo dal numero dei lati: per cui, assegnata la misura del lato, o quella dell'apotema, resta individuata quella dell'apotema, o del lato. Però, escluso il caso del quadrato, tale rapporto è irrazionale (vedi nota pag. 130): quindi l'area di un poligono regolare, data la misura del lato o quella dell'apotema, risulta sempre approssimata.

Cerchio e Settore circolare

Come si sa dalla geometria razionale non è possibile costruire un segmento esattamente lungo quanto la circonferenza rettificata (nota pag. 125); poichè il cerchio è equivalente ad un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio, tale triangolo non si può costruire; ne risulta che ogni costruzione effettuata allo scopo di dedurre la regola per la determinazione dell'area del cerchio, non è rigorosa, ma solo

approssimata. Tra tali costruzioni sarà bene scegliere quelle che, pur essendo, come si è detto, approssimate, abbiano il pregio di essere più intuitive per gli alunni.

Consigliamo la seguente:

con quattro accurate ripiegature successive si ottiene la divisione del cerchio in 16 settori uguali (fig. 36); si ritagliano questi lungo i raggi e si dispongono come nella fig. 37.

Si ottiene una figura che, con una certa approssimazione, può essere considerata un parallelogramma. Essa ha evidentemente la stessa superficie del cerchio, l'altezza uguale al raggio di questo e la base uguale alla sua semicirconferenza. Ne risulta:

area cerchio = area parallelogramma

per cui:

area cerchio = lunghezza semicirconferenza × lunghezza raggio.

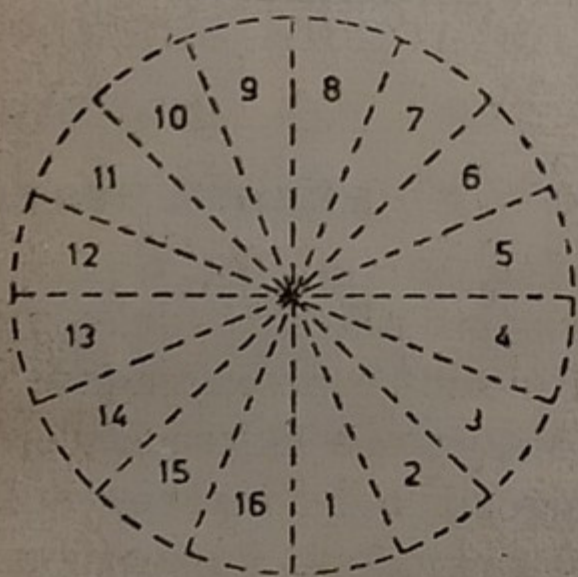
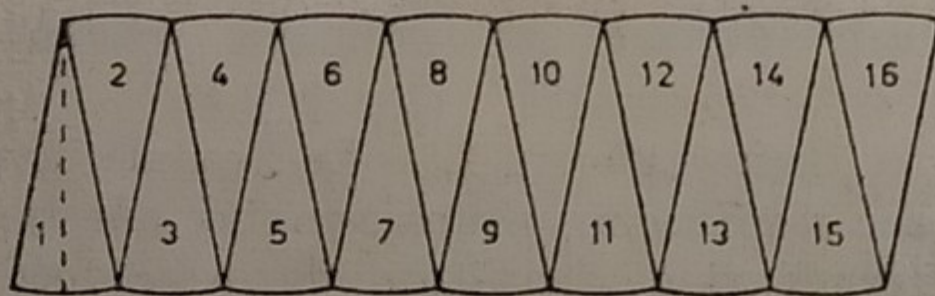



Fig. 36 Fig. 37

OSSERVAZIONE I. – Spesso si usa presentare il cerchio come un poligono regolare di infiniti lati. Questo concetto trascende le capacità degli alunni di una scuola elementare, perchè implica l'intuizione di « infinito » e di limite; può solo servire a ricordare la formula dell'area del cerchio, per analogia con quella dei poligoni regolari.

OSSERVAZIONE II. – Qualche libro di testo cerca di spiegare la formula πr^2 dell'area del cerchio, confrontando direttamente il cerchio col quadrato costruito sul raggio. Questo confronto non può essere condotto che in modo arbitrario, grossolano e antiintuitivo.

Per l'area del settore circolare si procede come per il cerchio.

Ritagliato il settore in tanti piccoli settori uguali, ottenuti con un conveniente numero di ripiegature, si dispongono questi come in figura 39.

Si ottiene, con una certa approssimazione, un parallelogramma di superficie evidentemente uguale a quella del settore, di altezza uguale al raggio dello stesso e di

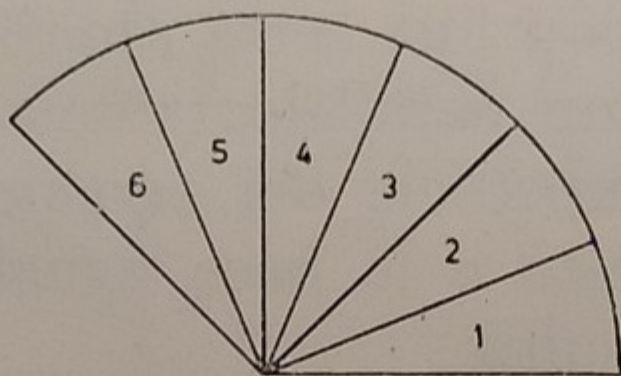



Fig. 38

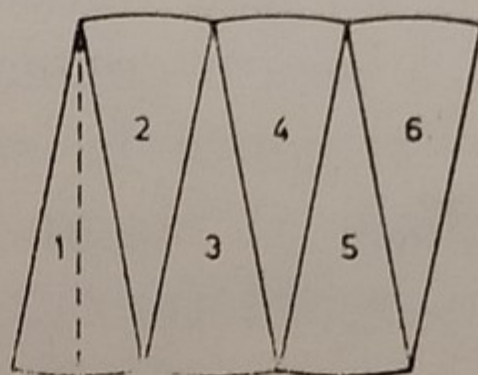



Fig. 39

base uguale a metà dell'arco che lo limita; per cui si può ricavare la relazione:

area settore = area parallelogramma

e quindi:

area settore = misura metà arco × misura raggio

OSSERVAZIONE I. – Le formule inverse relative alle aree delle figure piane si riducono ad una semplice questione aritmetica e precisamente alla determinazione del fattore di un prodotto, noto questo e l'altro fattore.

I problemi inversi sulle aree dei poligoni regolari e del cerchio esulano dal programma della scuola elementare, perchè richiedono l'operazione di estrazione di radice quadrata, che fa parte del programma delle scuole secondarie.

OSSERVAZIONE II. – Una necessità pratica, che si presenta abbastanza frequentemente, è quella di dover calcolare l'area della superficie di un appezzamento di terreno. Ma gli appezzamenti di terreno hanno raramente una forma geometrica che si possa catalogare tra quelle studiate. Perciò si cerca di risolvere la questione, scomponendo l'appezzamento in parti, di cui si sappia calcolare l'area (generalmente in triangoli e in rettangoli).

Sarà bene che gli alunni delle scuole elementari siano convenientemente esercitati anche nella risoluzione di problemi del genere.

QUESTIONI DIDATTICHE RELATIVE AI SOLIDI GEOMETRICI

Il maestro deve avere a disposizione le figure solide fondamentali (in legno o in cartone):

qualche prisma retto (triangolare, quadrangolare, ecc.),
qualche parallelepipedo rettangolo, cubo compreso,
qualche piramide regolare e
cilindri, coni, sfere di varie dimensioni.

Questi solidi verranno presentati a gruppi, i prismi in primo luogo, poi i parallelepipedi rettangoli, i cubi, le piramidi, ecc. ecc.

Sotto la guida del maestro gli alunni impareranno a scoprirne le caratteristiche essenziali. Misureranno col loro metro gli spigoli, ne controlleranno la eventuale perpendicolarità col bordo del quaderno, o con la squadra, o col rapportatore.

Troveranno così, per esempio, che:

1) nei prismi retti tutte le facce laterali sono rettangolari, mentre le due basi possono essere poligoni qualsiasi, purchè uguali fra loro.

2) nei parallelepipedi rettangoli tutte le facce sono rettangolari, uguali a due a due e ognuna di esse può fare da base.

3) i cubi hanno tutte le facce uguali e quadrate.

4) le piramidi regolari hanno per base un poligono regolare e le loro facce laterali sono triangoli isosceli uguali.

5) le basi del cilindro sono cerchi uguali e paralleli.

Molto utile sarà far costruire in cartoncino agli allievi stessi i solidi da studiare (vedi nota alla fine del capitolo).

La costruzione di prismi retti, di parallelepipedi rettangoli e di cubi non presenta difficoltà notevoli, all'infuori dell'esattezza dell'esecuzione (vedi nota a piè di pagina).

Le figure 40, 41, 42 lo dimostrano chiaramente ed indicano come si deve procedere.

Le figure 40, 41, 42, ritagliate e ripiegate lungo i segmenti tratteggiati dànno rispettivamente un prisma triangolare retto, un parallelepipedo rettangolo e un cubo; esse ne rappresentano le rispettive superfici totali.

La costruzione della piramide presenta invece alcune difficoltà derivanti dal fatto che le sue facce ed i suoi spigoli devono soddisfare a determinate condizioni.

Infatti le facce concorrenti nel vertice debbono essere tali che la loro somma sia minore di quattro angoli retti; ma tale somma dipende dal numero di queste facce (uguali tra loro) e dalla loro ampiezza; questa, a sua volta, dipende dal rapporto fra lo spigolo di base e quello laterale; perciò tali spigoli *non possono essere assegnati a caso.*

Nota. – Si ricorda che in ogni angoloide la somma delle facce è sempre minore di quattro angoli retti. Tutti gli angoloi di delle figure nominate hanno 3 facce, delle quali due sono angoli retti e la terza (angolo del poligono di base, che può essere qualsiasi, ma convesso) è senz'altro minore di un angolo piatto. Ne risulta che la condizione suddetta è sempre verificata. Poichè inoltre la lunghezza degli spigoli non deve soddisfare ad alcuna condizione, i solidi citati sono sempre costruibili, qualunque siano le dimensioni assegnate.

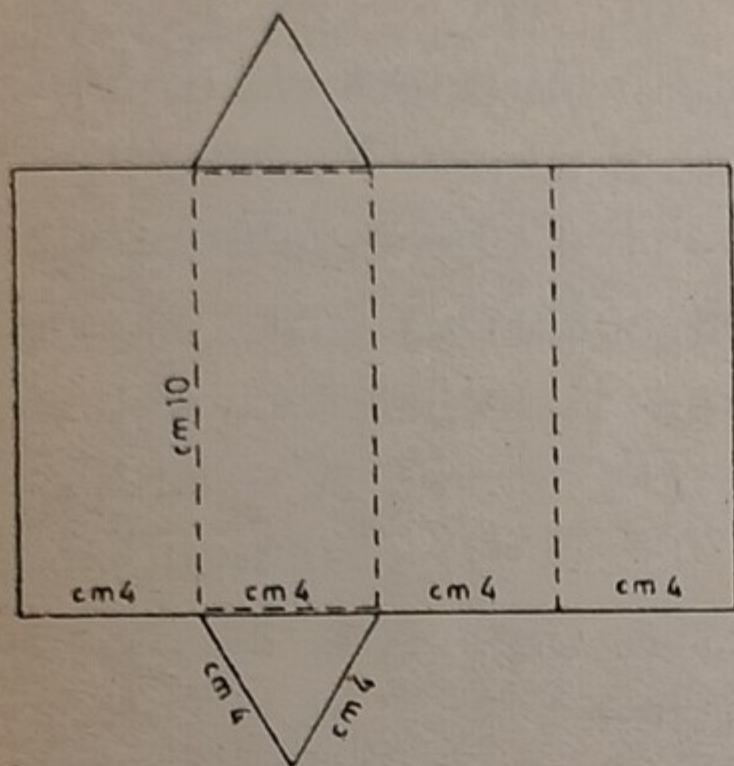



Fig. 40

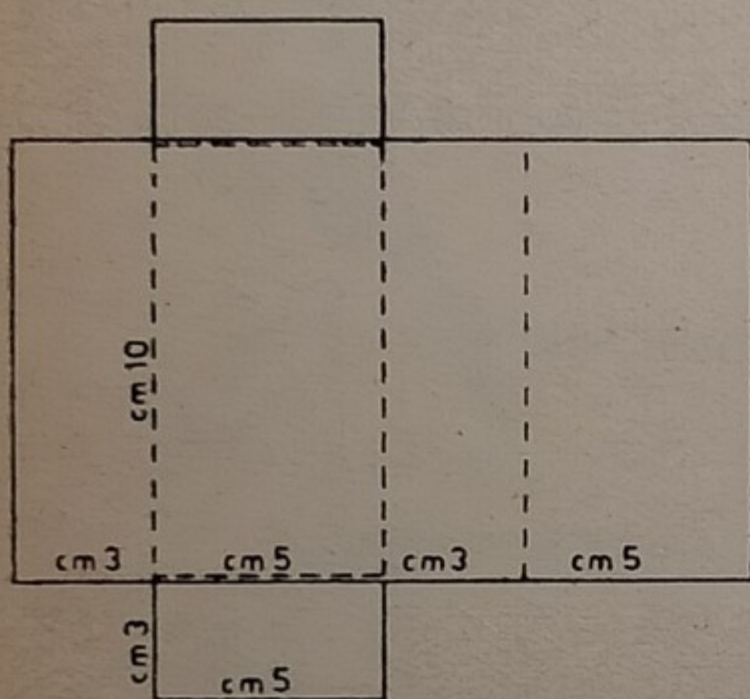
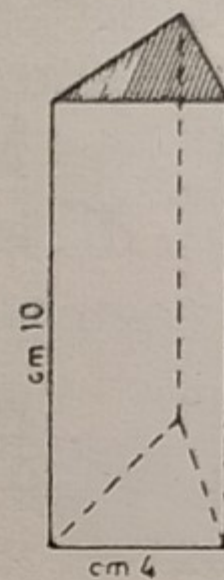



Fig. 41

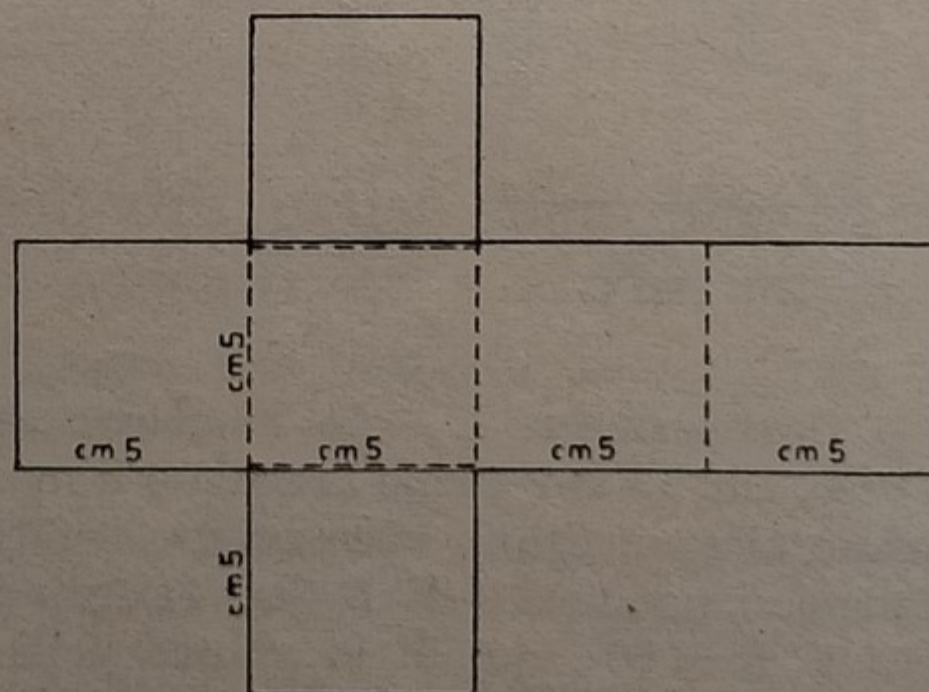
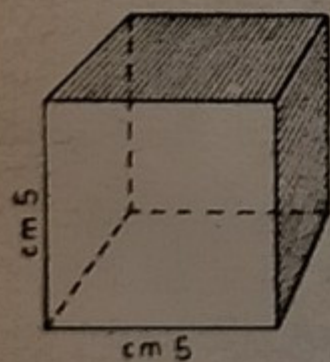
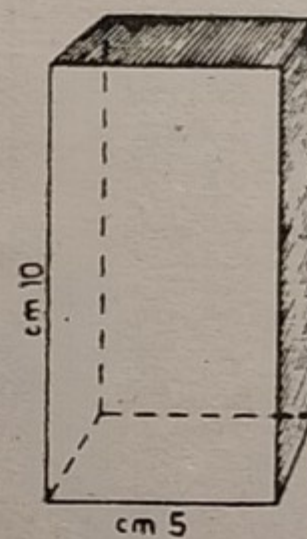



Fig. 42

Consigliamo la seguente costruzione:

Disegnato il quadrato $ABCD$ con $AB =$ cm. 10, centrando successivamente in A e in B con apertura di compasso uguale a cm. 13, si determina il punto V; centrando in V con la stessa apertura si descrive una circonferenza e su di essa si trasportano consecutivamente ad AB tre segmenti uguali ad AB stesso. Ritagliata la fig. 43 lungo il contorno A, D, C, B, C', D', A', V, A e ripiegatala lungo i segmenti AB, BV, VC', VD, si ottiene una piramide regolare a base quadrata (fig. 45); la fig. 43 ne rappresenta la superficie totale.

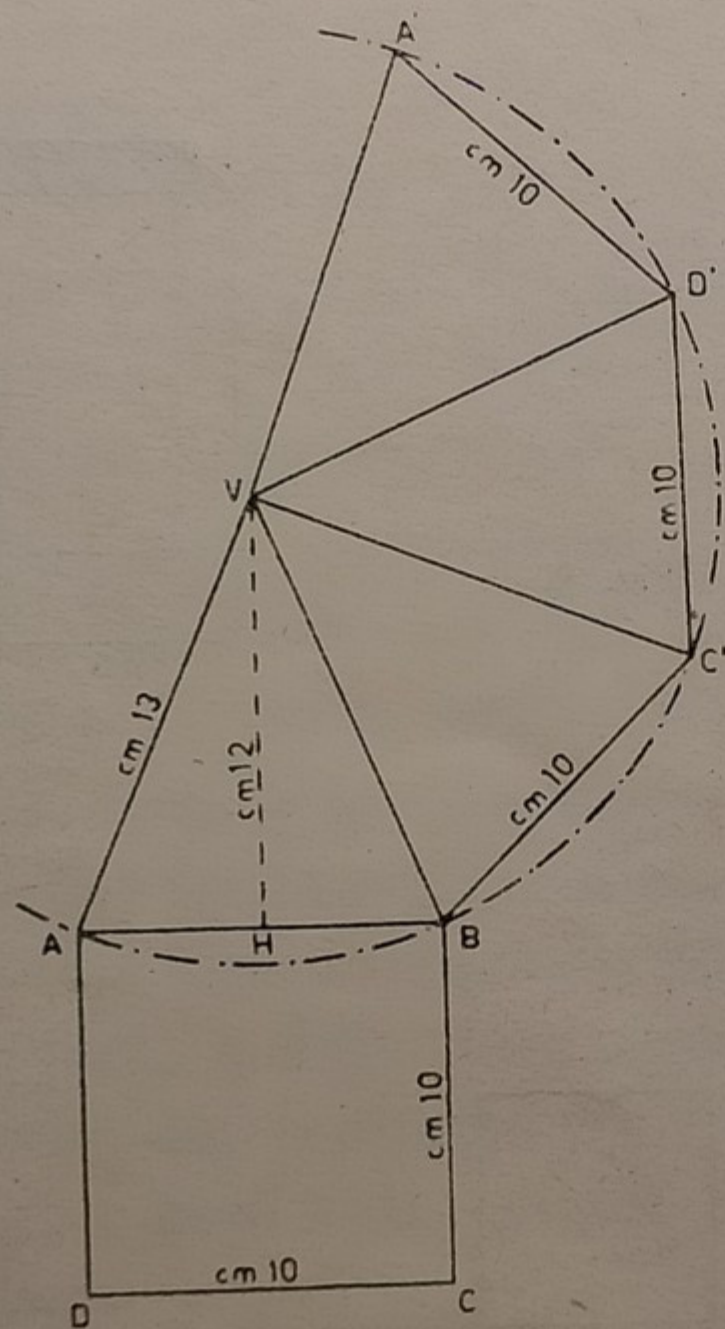



Fig. 43

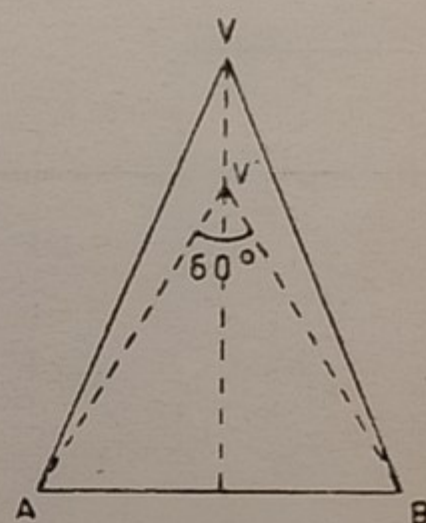



Fig.44

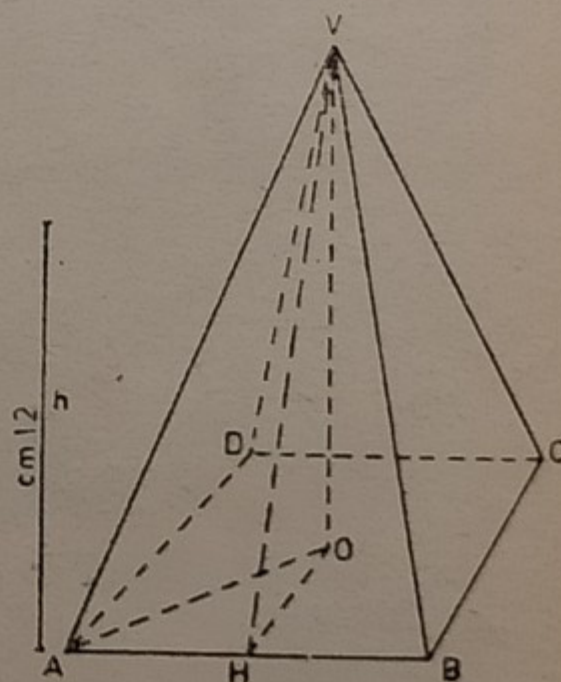



Fig. 45

OSSERVAZIONE I. – Le lunghezze assegnate, cm. 10 per lo spigolo di base, cm. 13 per quello laterale e il numero 4 degli spigoli di base, soddisfano alle condizioni viste prima. Infatti il triangolo $A\widehat{V}B$ contiene il triangolo equilatero $A\,V'\,B$ (fig. 44), perciò l'angolo $A\widehat{V}B$ risulta minore di $A\,V'\,B = 60^o$: quindi la somma delle facce;

$$A\widehat{V}B + B\widehat{V}C' + C'\widehat{V}D' + D'\widehat{V}A'$$

è minore di $60^o \times 4$, ossia di 240^o e a maggior ragione è minore di 360^o.

Osservazione II. – Ricordiamo che in una piramide regolare lo spigolo di base, lo spigolo laterale, l'apotema e l'altezza sono legati da relazioni pitagoriche (vedi nota a piè di pagina), come si vede nella fig. 45 dove i triangoli $O\ V\ A$, $O\ V\ H$ sono rettangoli in O e il triangolo $H\ V\ A$ è rettangolo in H.

Perciò di tali elementi se ne possono assegnare solo due arbitrariamente (purchè entro i limiti posti dalle condizioni viste a pag. 144): gli altri restano da essi univocamente individuati.

Di questo deve tener conto il maestro, quando prepara i problemi sulla piramide, ricordando che gli scolari di quinta elementare non conoscono il teorema di Pitagora; i dati relativi alla figura vanno calcolati preventivamente; nei casi pratici, gli alunni risolvono la questione mediante misurazioni dirette degli elementi indispensabili.

Crediamo di facilitare il compito del maestro, che desideri prepararsi problemi originali, fornendogli alcune terne pitagoriche (terne di numeri soddisfacenti alla relazione pitagorica):

(1) { 3, 4, 5 } e tutte le terne multiple secondo un numero n { $3\ n$, $4\ n$, $5\ n$ }

(2) { 5, 12, 13 } e tutte le terne multiple secondo un numero n { $5\ n$, $12\ n$, $13\ n$ }

(3) { 8, 15, 17 } e tutte le terne multiple secondo un unmero n { $8\ n$, $15\ n$, $17\ n$ }

(4) { 7, 24, 25 } e tutte le terne multiple secondo un numero n { $7\ n$, $24\ n$, $25\ n$ }

(5) { 9, 40, 41 } e tutte le terne multiple secondo un numero n { $9\ n$, $40\ n$, $40\ n$ }

Le costruzioni del cilindro e del cono sono facili, come si vede dalle figure seguenti, 46 e 47. In entrambi i casi, assegnata la lunghezza del raggio, cm. 2,5, si de-

---

Nota. – Ricordiamo che, per il teorema di Pitagora, le misure dei lati di un triangolo rettangolo soddisfano alla relazione seguente:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{(relazione detta pitagorica)}$$

dove a è la misura dell'ipotenusa, b e c quella dei cateti.

termina la lunghezza della circonferenza moltiplicando la misura 5 del diametro per 3,14; si ottiene 15,7.

Per il cilindro basta disegnare il rettangolo lungo cm. 15,7, alto cm. 12 e tangenti ad esso i due cerchi di cm. 2,5 di raggio, come in fig. 43; ritagliata la figura, basta ripiegare ad angolo retto i due cerchi lungo le tangenti parallele e avvolgervi intorno il rettangolo.

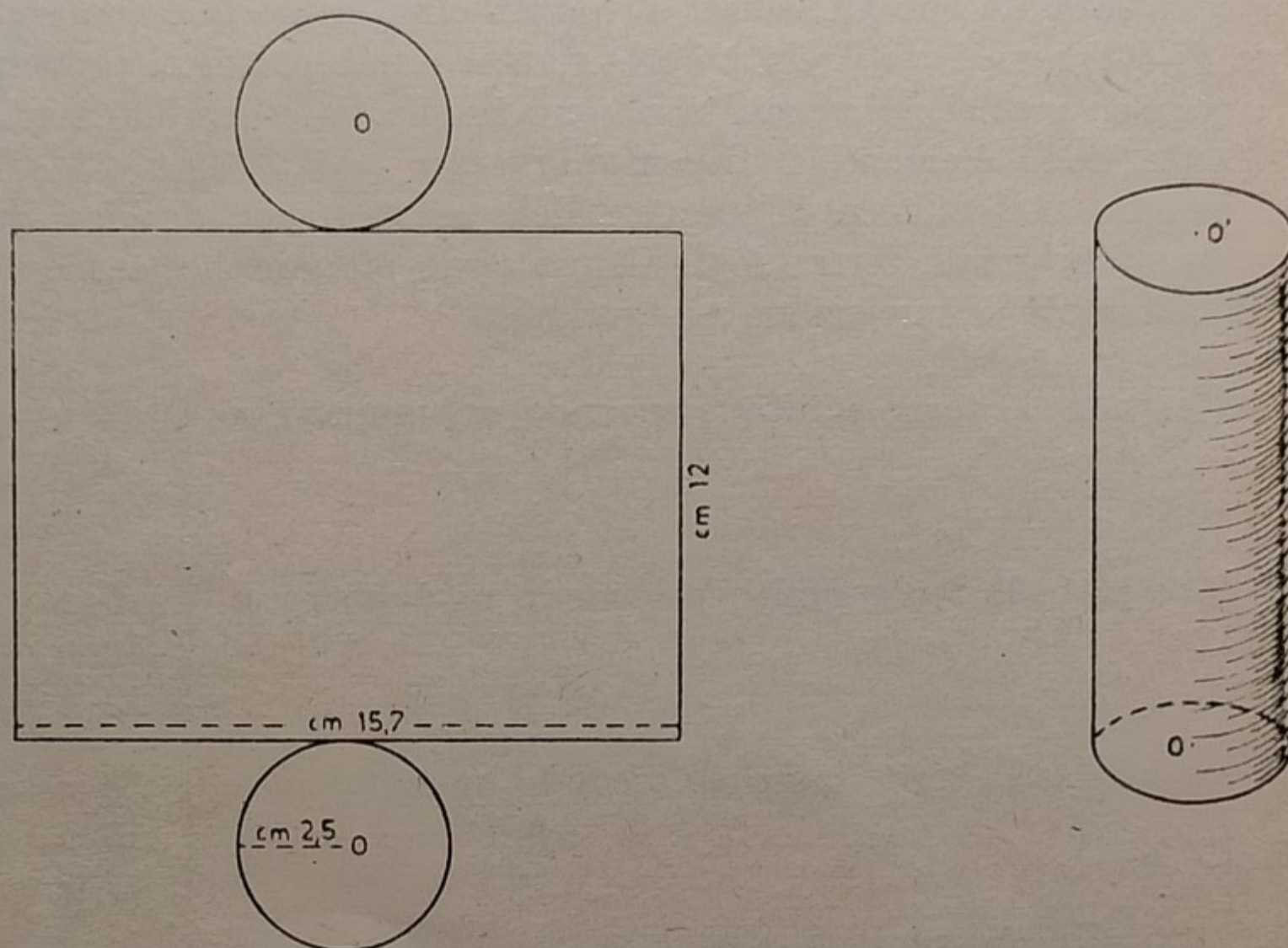



Fig. 46

Per il cono, premesso che l'apotema deve essere, come in fig. 47, maggiore del raggio, si disegna una circonferenza di raggio cm. 6,5 e su questa, mediante una sottile funicella lunga cm. 15,7, si determina un arco AB di tale lunghezza; si congiungono A e B con il centro V; si disegna poi, tangente esternamente all'arco, un cerchio di raggio cm. 2,5. Si ritaglia la figura e si ripiega il cerchio lungo la tangente comune all'arco, avvolgendogli intorno il settore. Le figg. 46 e 47 rappresentano le superfici del cilindro e del cono.

Osservazione. — Anche nel cono, come nella piramide, il raggio, l'apotema e l'altezza, sono lati di un trian-

golo rettangolo e quindi le loro misure sono legate dalla relazione pitagorica; valgono perciò tutte le considerazioni fatte a pag. 147 nell'Osservazione II.

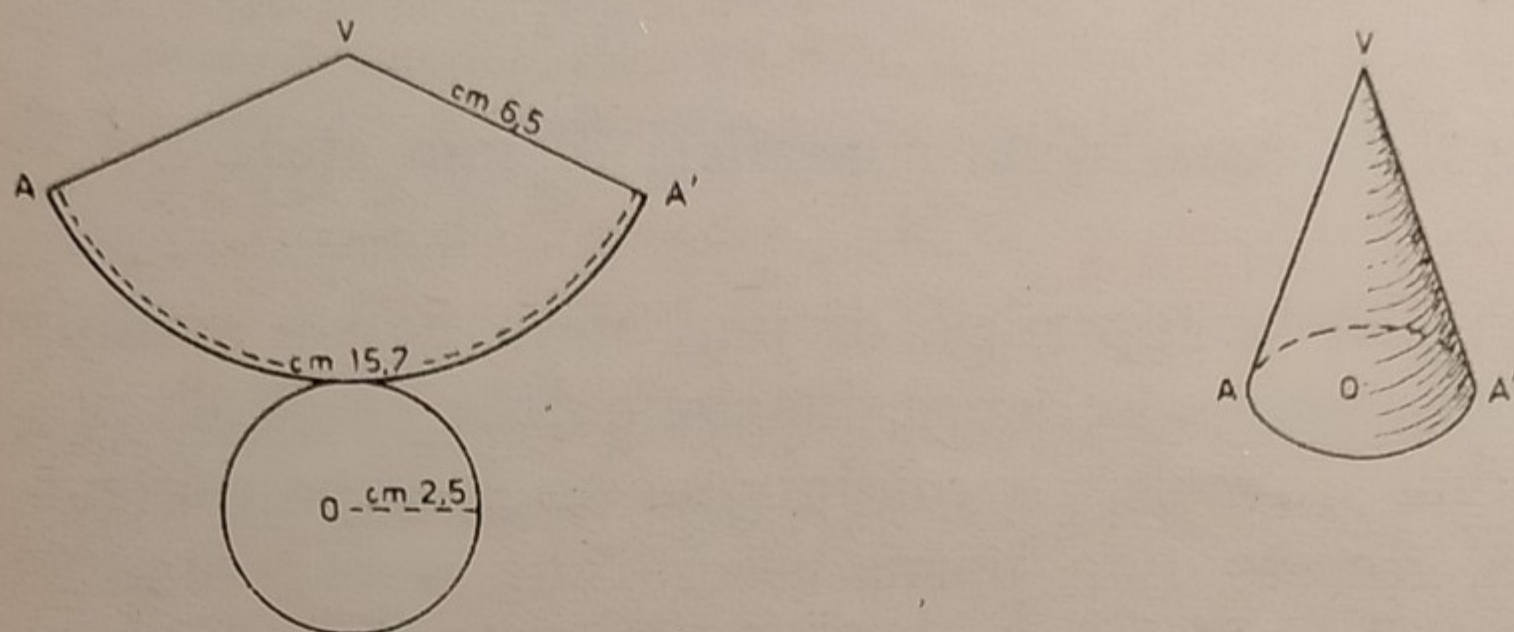



Fig. 47

La sfera è una figura che non può essere costruita col ritaglio di una figura piana, ripiegandola e avvolgendola poi, come si è fatto per il cilindro e per il cono.

L'esame delle figure 40, 41, 42, 43, 46, 47, disegnate per la costruzione dei solidi considerati, porta facilmente alle note regole per il calcolo delle aree delle superfici laterali e totali dei medesimi.

Osservazione I. – Sarà bene che ogni alunno conservi tra le pagine di un apposito album, le figure da lui disegnate e ritagliate per la costruzione dei solidi geometrici: così, sfogliando l'album, in ogni pagina apparirà una figura che, ripiegata, riprodurrà un determinato solido: le dimensioni, le caratteristiche e le formule relative ad esso saranno scritte accanto. Ogni volta che un alunno cadrà in errore nella trattazione di una certa figura, il maestro lo inviterà a riesaminare la figura stessa nel suo album personale: attraverso l'osservazione diretta, sarà più facile e più proficua la correzione dell'errore.

Osservazione II. – I dati da noi consigliati per la costruzione delle figure geometriche solide, sono stati così scelti per vari motivi:

perchè costituenti terne pitagoriche (da cui il calcolo esatto delle misure di altri elementi della figura),

perchè ben rispondenti ad una comoda costruzione,

perchè determinanti figure di dimensioni adeguate allo scopo per cui furono costruite (facile manovrabilità, conservazione in cartelle, ecc.)

È ovvio che ogni maestro può mutare tali dati a piacere, a seconda delle eventuali esigenze. Basta solo che tenga ben presente le condizioni (da noi di volta in volta citate) a cui questi dati debbono soddisfare. Il lavoro gli sarà facilitato conservando le stesse proporzioni.

Area della superficie di una sfera

Poichè la superficie di una sfera non è sviluppabile su di un piano, la determinazione della sua area presenta notevoli difficoltà e qualunque sia il procedimento seguito, questo non potrà essere che approssimato. Per dare agli alunni una ragione abbastanza intuitiva della relazione:

area superficie sferica = area cerchio massimo × 4.

consigliamo il procedimento seguente.

Il maestro si provveda di una sfera, scomponibile in due emisferi, avente il raggio di cm. 4, di un disco di cartone dello stesso raggio e di un gomitolo di spago. Steso su un emisfero un sottile strato di « coccoina » o di sostanza adesiva analoga, fissato con uno spillo l'estremo dello spago al vertice della calotta, il maestro avvolga lo spago intorno a se stesso facendolo aderire alla calotta, in modo che ogni giro combaci perfettamente col giro precedente, in ogni punto. Ricoperta tutta la calotta, tagli lo spago e col rimanente ricopra in modo analogo tutta una faccia del disco preparato, cominciando dal centro. Tagliato ancora lo spago, faccia confrontare dagli alunni la quantità di esso che è stata necessaria per ricoprire l'emisfero, con quella occorsa per ricoprire il disco.

Tutti constateranno che la prima quantità è doppia della seconda e, con una immediata astrazione, concluderanno che la superficie di una mezza sfera è doppia di quella di un cerchio massimo, per cui la superficie di

tutta la sfera ne sarà il quadruplo (vedi nota a piè di pagina).

OSSERVAZIONE. – Per le formule inverse relative alle aree delle superfici laterali dei prismi, dei parallelepipedi, delle piramidi, dei cilindri e dei coni, valgono le considerazioni già fatte nell'osservazione di pag. 142.

Le formule inverse relative alle aree delle superfici del cubo e della sfera esulano dal programma di una scuola elementare, perchè necessitano dell'operazione di estrazione di radice quadrata.

Esempi di alcuni problemi sulle aree delle superfici dei solidi, rispecchianti necessità pratiche.

1) Calcolare l'area della superficie di lamiera occorrente alla costruzione di un tubo per la stufa dell'aula, tenendo conto che nell'avvolgere la lamiera, un bordo deve soprapporsi all'altro lungo tutta una striscia larga 2 centimetri.

(*Il maestro faccia misurare agli alunni il raggio e l'altezza del tubo in questione*).

2) Calcolare l'area della superficie di cartone occorrente per costruire una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo, di dimensioni assegnate, tenendo presente che il coperchio deve sopravanzare tutt'intorno la scatola di 1 centimetro, e che occorrono strisce larghe 1 centimetro lungo tutte le saldature.

3) Calcolare l'area della superficie di legno occorrente, per costruire una cassa cubica, di dimensioni assegnate, tenendo presente che il coperchio deve sopravanzare da tre lati (uno è quello attorno al quale il coperchio si solleva) la cassa di 2 centimetri.

4) Calcolare l'area della superficie dell'aula (tenendo conto delle aperture) agli effetti della spesa per l'imbiancatura.

(*Le varie misurazioni necessarie siano effettuate dagli alunni*).

NOTA. – Alcuni libri di testo per giustificare la relazione:

(1) *area superf. sfera = area cerchio massimo* × 4

consigliano di pesare una sfera cava molto sottile e di pesare anche un disco dello stesso materiale e dello stesso spessore, avente il medesimo raggio. Dalla constatazione che la prima pesa il quadruplo del secondo, si deve dedurre la (1). Ma, innanzi tutto, è difficile realizzare il disco dello stesso materiale e dello stesso spessore, inoltre si deve passare attraverso il concetto di peso, seguendo quindi un criterio più complicato rispetto a quello consigliato sopra.

5) Calcolare la spesa necessaria per rivestire di piastrelle quadrate, di lato assegnato, le pareti di un bagno, di date dimensioni, fino a un'altezza assegnata, sapendo il costo di una piastrella.

6) Calcolare la spesa necessaria per costruire il tetto in lamiera di un'edicola, a forma conica, desumendo dalle opportune misurazioni il diametro, tenendo presente la lunghezza dell'apotema, la striscia lungo la saldatura e il prezzo della lamiera al metro quadrato.

VOLUME DEI SOLIDI

Ricordiamo che per « Volume » di un solido si intende la misura della sua estensione, cioè il rapporto tra il solido dato e il cubo scelto come unità di misura.

Anche in questo campo, la determinazione dei volumi dei vari solidi, si riconduce a quella relativa al parallelepipedo, sfruttando i noti teoremi di equivalenza tra le figure solide.

Volume del parallelepipedo rettangolo

Materiale didattico occorrente. — Una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo, avente gli spigoli di base di cm. 4 e di cm. 3 e alta cm. 5; un buon numero di cubetti di un centimetro di lato (già usati per l'insegnamento delle unità di misura dei volumi).

Il maestro faccia disporre dagli alunni uno strato di cubetti sul fondo della scatola, in modo da ricoprirlo tutto.

Gli scolari vedranno subito che i cubetti occorrenti per questo strato sono tanti quanti sono i centimetri quadrati contenuti nella superficie di base e cioè:

$$4 \times 3 = 12$$

Quindi il maestro provi a chiedere quanti strati di cubetti si dovranno fare per riempire tutta la scatola. Alcuni sapranno rispondere e altri no; costoro saranno in-

vitati a disporre sopra il primo un secondo strato, se occorre un terzo, finchè si convinceranno che il numero degli strati occorrenti è uguale al numero dei centimetri contenuti nell'altezza della scatola e cioè 5.

A questo punto sarà facile far compiere la ulteriore deduzione:

Volume scatola = numero dei cubetti in essa contenuti =
= cubetti di uno strato × numero strati =
= 12×5 = area base × misura altezza.

Generalmente si potrà poi concludere:

1) *Volume parallelepipedo rettangolo = area base × × misura altezza.*

Dalla 1), se l'insegnante lo crede opportuno, può dedurre la relazione seguente, molto usata in pratica e sintetizzata così:

2) *Volume parallelepipedo rettangolo = lunghezza × × larghezza × altezza.*

Volume del prisma

Come è noto dalla geometria, un prisma ha lo stesso volume di un parallelepipedo rettangolo di base equivalente e uguale altezza; quindi si ha:

volume prisma = volume parallelepipedo =
= area base × misura altezza.

Il maestro porterà facilmente gli alunni a questa conclusione, costruendo un parallelepipedo rettangolo e un prisma retto, entrambi cavi, di basi equivalenti e di uguale altezza, riempiendo il primo di riso o di farina di grano turco e travasando il contenuto nel secondo; si

constaterà che i due solidi hanno la stessa capacità e quindi ugual volume.

L'unica difficoltà che si presenta è la costruzione delle basi equivalenti dei due solidi.

Consigliamo, in proposito, di costruire prima un esagono regolare col raggio di cm. 5; questo sarà la base del prisma retto, la cui altezza si prenderà di cm. 12.

Per costruire la base equivalente del parallelepipedo rettangolo, si disegnerà un esagono uguale al precedente,

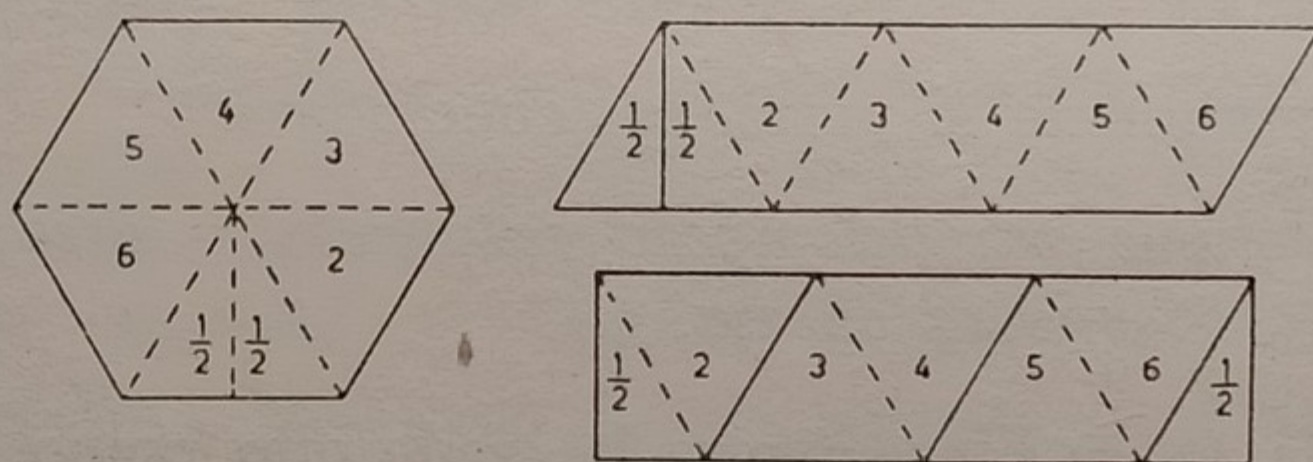



Fig. 48

che verrà trasformato in un rettangolo equivalente, seguendo il procedimento facilmente desumile dalla fig. 48.

Fatta constatare agli alunni l'evidente equivalenza dell'esagono e del rettangolo ottenuto, su questo il maestro costruirà un parallelepipedo rettangolo alto cm. 12, come il prisma.

Volume della piramide

Il teorema: « il volume di una piramide è uguale alla terza parte del volume di un prisma, che abbia base e altezza uguali a quella della piramide stessa », porta alla relazione:

volume piramide = *volume prisma* : 3 = *area base* ×
× *misura altezza* : 3.

Il maestro può facilmente far ricavare questa relazione dagli alunni stessi, servendosi del prisma a base

esagonale già usato (vedi pag. 153) e costruendo, (secondo il procedimento consigliato a pag. 146), una piramide avente per base un esagono regolare come quello del prisma e lo spigolo laterale lungo cm. 13. L'altezza di questa piramide risulterà proprio di cm. 12 (vedi nota a piè di pagina), come quella del prisma, ciò che gli alunni controlleranno con facilità. Riempita la piramide di riso o di farina, gli alunni ne travaseranno il contenuto nel prisma e constateranno che per riempire questo, l'operazione dovrà essere ripetuta altre due volte.

Volume del cilindro

Nella geometria si dimostra che un cilindro ha lo stesso volume di un parallelepipedo rettangolo di base equivalente e uguale altezza; da ciò si deduce immediatamente la relazione:

volume cilindro = *volume parallelepipedo* = *area base* ×
× *misura altezza.*

Questa relazione può essere ricavata dagli alunni stessi nel modo seguente.

Costruito un cilindro cavo col raggio di cm. 5 e alto cm. 12, si costruisca anche un parallelepipedo rettangolo cavo, largo cm. 15,7, lungo cm. 5 (come il raggio del cilindro) e alto cm. 12.

Si faccia poi constatare, servendosi come al solito di

NOTA. – La misura dell'altezza di una piramide regolare si ricava applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo avente per ipotenusa lo spigolo laterale e per cateti il raggio di base e l'altezza stessa della piramide.

Nel caso suesposto si ha:

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

riso o di farina, che i due solidi hanno la stessa capacità e quindi lo stesso volume.

Gli alunni vedono subito che i due solidi hanno la stessa altezza; l'equivalenza delle basi non è così evidente, data la forma diversissima, ma viene dedotta, facendo osservare che 15,7 è il risultato di $10 \times 3{,}14 : 2$, il quale rappresenta la lunghezza della semicirconferenza del cilindro; per cui si ha:

area base parallelepipedo = $15{,}7 \times 5$
area base cilindro = misura semicirconf. × misura raggio = $15{,}7 \times 5$

ed infine:

area base parallelepipedo = area base cilindro.

Volume del cono

Il volume di un cono è la terza parte di quello di un cilindro, che ha la base e l'altezza uguali a quelle del cono dato.

Da questo teorema risulta immediatamente la relazione:

volume cono = *volume cilindro* : 3 = *area base* × *misura altezza* : 3.

È facile per gli alunni ricavare questa relazione; basta mettere a loro disposizione il cilindro già costruito (vedi pag. 155) e un cono cavo, di raggio uguale a quello del cilindro e di apotema cm. 13 (vedere per la costruzione la pag. 149).

NOTA. – L'altezza di un cono è cateto di un triangolo rettangolo avente come ipotenusa l'apotema del cono e per altro cateto il raggio; per mezzo del teorema di Pitagora, nel caso suesposto si ha quindi:

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

L'altezza del cono risulta uguale a quella del cilindro, cm. 12 (vedi nota a piè della pagina precedente).

Riempito il cono di riso o di farina, se ne versa il contenuto nel cilindro e si constata facilmente che, per riempire il cilindro, bisogna ripetere l'operazione altre due volte.

Volume della sfera

Si dimostra in geometria che il volume di una sfera è uguale ai $\frac{2}{3}$ di quello del cilindro equilatero (vedi nota a piè di pagina), avente il raggio uguale a quello della sfera considerata; si ha perciò la relazione:

volume sfera $= \frac{2}{3}$ volume cilindro equilatero = area base cilindro × misura diametro : 3 × 2

ossia:

1). *volume sfera = area cerchio massimo × misura diametro* : 3 × 2.

Questa relazione si può far ricavare dagli alunni con facilità, in analogia con quanto è stato fatto per gli altri solidi.

Basta procurarsi una sfera cava (di celluloide, o di ferro, o di altro materiale, purchè di spessore trascurabile), con una piccola apertura sulla superficie; si costruisce poi un cilindro cavo, di raggio uguale a quello della sfera e di altezza uguale al diametro. In pratica, per determinare la lunghezza del diametro di una sfera

---

Nota. – Si ricorda che un cilindro si dice equilatero, quando la sua altezza è uguale al diametro. Il termine « equilatero » si spiega, osservando che la sezione di un tale cilindro con un piano passante per l'asse, è un quadrato (poligono *equilatero* oltre che equiangolo).

(palla, boccia, ecc.), basta collocare questa tra due piani paralleli (piano del tavolo e foglio di carta) ad essa tangenti e misurare la distanza tra i due piani.

Sulla superficie laterale del cilindro si tracciano due circonferenze parallele ed uguali a quella di base, in modo da dividere la superficie stessa in tre parti uguali.

Riempita la sfera di sabbia fine e pesante, la si travasi nel cilindro; si vedrà che essa arriva al livello della seconda circonferenza disegnata, riempiendo così solo $\frac{2}{3}$ del cilindro.

Osservazione I. – La relazione molto usata:

(2) *volume sfera = area sup. sferica × misura raggio : 3*

può essere ricavata dalla (1) con l'applicazione di note proprietà dell'aritmetica, nel seguente modo:

volume sfera = area cerchio massimo × misura diametro : 3 × 2 =
= 2 area cerchio massimo × 2 misura raggio : 3 =
= 4 area cerchio massimo × misura raggio : 3 =
= *area superficie sferica × misura raggio* : 3.

Però questi passaggi non possono essere compresi dagli alunni di quinta elementare, perchè non conoscono le proprietà applicate.

Alcuni libri di testo ricavano la (2), considerando la sfera come somma di infinite piramidi, aventi il vertice nel centro della sfera, di altezza uguale al raggio della medesima e con le basi (piccolissime) sulla superficie sferica. Questa rappresentazione della sfera implica parecchie difficili astrazioni e il concetto di « infinito », le une e l'altro decisamente inadeguati alla mentalità di un ragazzo. Per queste ragioni sconsigliamo l'uso della relazione (2) nella scuola elementare.

Osservazione II. – Per le formule inverse relative ai volumi dei prismi, dei parallelepipedi, delle piramidi, dei cilindri e dei coni, valgono le considerazioni già fatte nell'osservazione di pag. 151.

Le formule inverse, relative ai volumi del cubo e della sfera, non possono essere trattate nella scuola elementare, se non in forma molto speciale, perchè richiedono l'estrazione di radice cubica. Le forme speciali, nel caso del cubo, si riducono al calcolo della misura del lato, essendo noti il volume e l'area di una faccia, oppure al calcolo dell'area di una faccia, noti il volume e la lunghezza dello spigolo.

Nel caso della sfera, si può calcolare la misura del raggio, assegnando il volume e l'area della superficie sferica, oppure si può calcolare l'area della superficie sferica, noti il volume e la misura del raggio.

È ovvio, però, che in tutti questi casi i valori assegnati, essendo dipendenti l'uno dall'altro, debbono essere preventivamente calcolati con cura dal maestro (vedi nota a piè di pagina).

Volumi dei solidi non geometrici

Nella vita pratica può presentarsi il caso di dover determinare il volume di un solido, la cui forma non possa in alcun modo essere ridotta a una di quelle geometriche

---

NOTA. – Un cubo è determinato da 1 solo dei suoi elementi: lato, superficie di una faccia, superficie laterale, superficie totale, diagonale faccia, diagonale cubo, volume.

Quindi assegnando *uno solo* di tali elementi, tutti gli altri restano univocamente determinati.

Una sfera è determinata da uno solo dei suoi elementi; raggio, circonferenza massima, cerchio massimo, superficie sferica, volume.

Quindi assegnando *uno solo* di tali elementi, gli altri, tutti, restano pienamente individuati.

Un triangolo equilatero è completamente determinato in tutti i suoi elementi, assegnando il lato, oppure assegnando l'apotema, o l'altezza, o la superficie, o il perimetro; la stessa cosa vale per qualunque poligono regolare. Quindi nell'assegnare problemi inversi sui poligoni regolari, in quelle forme speciali che ne consentano la risoluzione nella scuola elementare, bisogna fare attenzione ai due dati necessari; uno può essere scelto ad arbitrio, l'altro *deve* essere calcolato conseguentemente.

Esempio I. – Calcolare il lato di un esagono regolare, nota la superficie e (per la scuola elementare) l'apotema.

[Il maestro deve preventivamente calcolare la misura dell'apotema e della superficie, partendo da una misura da lui scelta per il lato: in questo modo i due dati del problema saranno giusti e lo scolaro mediante la formula inversa dell'area, ritroverà con essi la misura del lato, senza usare il numero fisso].

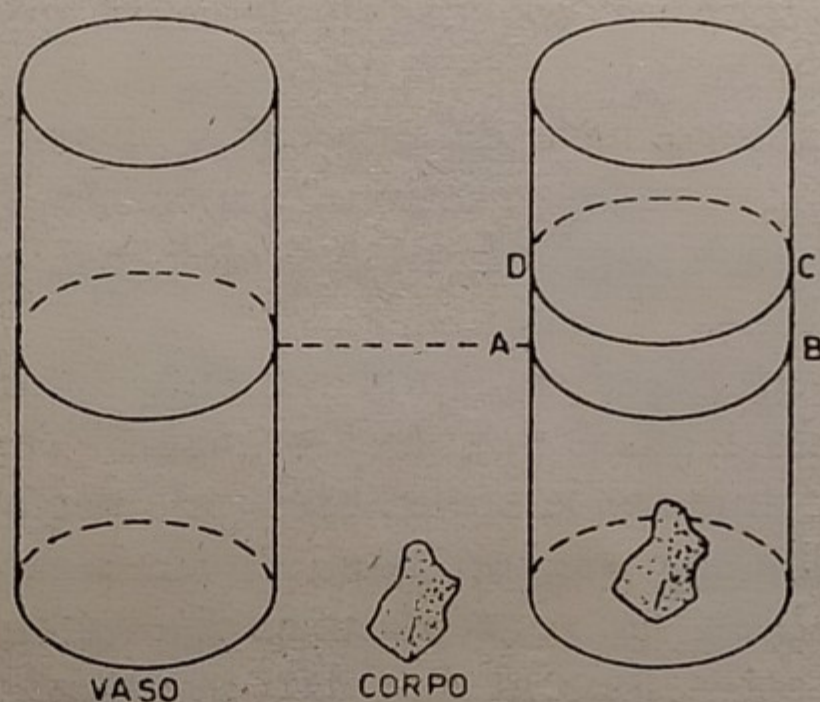
Esempio II. – Calcolare il lato di un triangolo equilatero, nota la superficie e (per la scuola elementare) l'altezza.

[Il maestro proceda come nel caso precedente, ricordando la formula

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
].

Esempio III. – Calcolare l'area della superficie di un triangolo equilatero nota l'altezza e nota l'apotema.

[Il maestro ricordi che nel triangolo equilatero l'altezza è il triplo dell'apotema].

studiate. Per un corpo non solubile, non assorbente e più pesante dell'acqua, la questione si può risolvere introducendo lo stesso in un vaso cilindrico (o parallelepipedo) contenente acqua fino a un dato livello e misurando di quanto s'innalza questo. Infatti il corpo immerso ha spostato una quantità d'acqua uguale al suo volume e questa quantità si determina calcolando il volume del cilindro che ha per raggio quello del cilindro dato e per altezza il dislivello provocato dall'immersione del corpo (vedi figura).

IL PROBLEMA E LA SUA RISOLUZIONE

Il problema è lo scoglio più grande che incontrano gli alunni di tutte le classi e, per gli insegnanti in generale, è il banco di prova delle capacità dei propri scolari.

Infatti, per la risoluzione dei problemi, non si possono dare regole o formule di carattere generale; ma ogni problema richiede in diversa misura: intuizione, riflessione e capacità logiche.

Queste doti sono possedute in modo molto vario dagli alunni: c'è chi ne è ben fornito e chi no. Però sbaglia gravemente chi pensa che gli alunni poco capaci non possano arrivare alla risoluzione di un problema di media difficoltà. Oseremmo anzi affermare che tutti gli scolari di intelligenza normale vi possono e vi debbono arrivare.

Il compito del maestro sta proprio nello sviluppare e nel potenziare le capacità intuitive e logiche, che sono patrimonio naturale di ognuno, per portarle al grado richiesto. Col suo paziente lavoro di ogni giorno, determinerà nello scolaro una « forma mentis » utile non solo e non tanto per la risoluzione dei problemi aritmetici, quanto per affrontare quelli ben più importanti della vita.

Tale lavoro è però molto difficile e ogni maestro lo svolge secondo la propria sensibilità ed esperienza.

Tuttavia ci sono criteri di carattere generale, a cui tutti i maestri dovrebbero uniformarsi, come i seguenti:

1) il problema non deve esulare da questioni di vita pratica, di cui il bambino abbia diretta esperienza.

2) deve essere accuratamente scelto o preparato, specialmente quando se ne richieda la risoluzione scritta.

3) le difficoltà di ogni nuovo problema devono essere scrupolosamente graduate, rispetto alle difficoltà già superate.

4) ogni difficoltà nuova deve essere prospettata da tutti i punti di vista, in numerosi problemi, fatti svolgere con organica continuità, finchè tutti gli alunni dimostrino nella risoluzione una certa sicurezza.

Il grande numero di esercizi consentirà ai meno capaci di sfruttare la memoria per aiutare l'intuito attraverso l'analogia.

5) ogni forma di meccanicità (formule, schemi, ecc.) deve essere bandita; infatti tali espedienti basati, per i bambini, esclusivamente sulla memoria, vengono dimenticati o confusi e, ciò che più importa, svuotano il problema di una delle sue principali peculiarità: lo sviluppo dell'intuizione e della logica.

6) il testo deve essere molto chiaro e breve.

7) durante la risoluzione, il fanciullo deve essere lasciato tranquillo, non sollecitato a fare rapidamente, non mortificato se lento o incerto, ma aiutato e guidato, se occorre, dal maestro. Questi si terrà pronto ad orientare, singolarmente, gli incerti, a far riconoscere gli eventuali errori ed a correggerli. Solo nelle prove di carattere conclusivo, il maestro si limiterà alla sola oculata sorveglianza, assegnando per la risoluzione un conveniente lasso di tempo, uguale per tutti. Se gli elementi della classe fossero notevolmente differenziati per capacità, il maestro li divida in gruppi, associando fra loro gli elementi che press'a poco si equivalgono e assegni poi ai diversi gruppi problemi con difficoltà concettuali identiche, ma più semplici per gli uni e meno per gli altri

(basta cambiare un dato, posporre una parola, inframezzare una domanda per rendere più semplice un dato problema). Naturalmente i relativi giudizi o voti saranno corrispondentemente proporzionati.

Dopo queste considerazioni di carattere generale, passiamo ad esaminare la questione classe per classe.

Problemi. - Classi I e II elementare

In prima classe il problema, nel senso più ristretto e scolastico della parola, manca; ma problemi sono tutte le questioni proposte al bambino, attraverso ad esercitazioni pratiche inizialmente e astratte in seguito, per dargli i concetti di numero, di somma, di differenza, di resto, di prodotto, di quoziente, ecc.

Di questi argomenti abbiamo già trattato a proposito delle operazioni (vedi pag. 50 e segg.).

In seconda il problema acquista una fisionomia propria, cioè ne viene dettato il testo e trascritta la risoluzione; ma poichè questa richiede, secondo il programma, una sola operazione, le difficoltà di carattere intuitivo sono le stesse incontrate in prima; solo si hanno numeri più grossi (vedi nota a piè di pagina).

Problema. - Classe III elementare

In questa classe il problema presenta varie difficoltà, che, essendo nuove, risultano particolarmente gravi per le giovani menti degli scolari.

Nota. – Si richiama l'attenzione sul fatto che le unità di misura (peso, lunghezza, capacità) vengono insegnate in 3a classe; perciò tutti i problemi di seconda non ne debbono fare alcun cenno; riguarderanno la determinazione del numero di oggetti ben noti ai bambini e al massimo, quella del loro prezzo (quaderni, pennini, figurine, palline, gomme, caramelle, ecc.).

Innanzi tutto i calcoli si estendono fino al mille e comprendono anche i numeri decimali; da qui la maggior laboriosità nelle operazioni e la maggior probabilità di errore.

Inoltre bisogna portare gli alunni a risolvere, entro l'anno scolastico, un problema, la cui risoluzione richieda due operazioni e una equivalenza (che poi è un'altra operazione), tra loro dipendenti.

A questo traguardo si potrà arrivare solo per gradi e con molta pazienza.

Dopo aver trattato numerosi problemi di una sola operazione, come quelli di seconda, si comincerà col risolvere problemi con due domande, delle quali la prima viene formulata nel testo del problema, subito dopo i dati necessari per l'operazione relativa, la seconda viene posta alla fine e richiede un'altra operazione, per la quale non occorre il risultato della prima.

I problemi di questo tipo non presentano una vera difficoltà nuova, perchè si riducono alla risoluzione di due problemi fra loro indipendenti.

Esempio.

Un pollivendolo porta al mercato 86 dozzine di uova. Quante uova porta in tutto? Ne vende 58 dozzine. Quante dozzine di uova riporta a casa?

Però il testo del problema, più lungo e più complesso di quelli a una sola operazione, richiede una lettura e un esame più attenti e più accurati. Il maestro aiuterà gli alunni, indirettamente, facendo loro rileggere il testo, invitandoli poi ad esaminare i dati uno alla volta, per attribuire loro il giusto significato.

Riferendoci al problema riportato nell'esempio, egli chiederà che cosa rappresenta il numero 86. Molto probabilmente parecchi sbaglieranno o risponderanno in modo incompleto; ma sfruttando e correggendo le varie rispo-

ste, il maestro riuscirà ad ottenere che si scriva alla lavagna:

86 = numero delle dozzine portate al mercato.

Procederà in modo analogo per gli altri dati; in tal modo sulla lavagna apparirà il seguente specchietto:

86 = numero delle dozzine portate al mercato
12 = numero delle uova di una dozzina
58 = numero delle dozzine vendute.

A questo punto i bambini si accingeranno alla risoluzione scritta del problema.

In seguito si risolveranno problemi come quelli del tipo precedente per il numero e la disposizione delle domande, nei quali però la seconda operazione necessiti del risultato della prima.

Esempio.

Un cartolaio ha 27 pacchi di quaderni; ogni pacco ne contiene 15. Quanti quaderni ha in tutto? Di questi, 75 sono a quadretti e gli altri a righe. Quanti sono quelli a righe?

Per la risoluzione valgono tutte le osservazioni già fatte prima; si consiglia però di far scrivere, subito dopo la prima operazione, la relativa risposta, per mettere bene in luce il risultato che necessita per l'operazione successiva.

I problemi che seguono immediatamente nell'ordine per difficoltà, sono quelli nei quali le due domande si trovano entrambe alla fine del testo. Ma se gli alunni sono stati sufficientemente esercitati sui problemi dei tipi precedenti e se il maestro insisterà, come sempre, per fissare il significato dei dati e delle domande, questo nuovo tipo di problemi non presenterà difficoltà sensibili. Essi

serviranno soprattutto a preparare il terreno per i problemi con due operazioni e una sola domanda.

Questi rappresentano la difficoltà più grande, tanto è vero che la maggioranza dei maestri li riserva per la classe quarta. Il programma ministeriale non ne parla esplicitamente; noi però siamo del parere di cominciare la trattazione di questi problemi in terza, quando la preparazione della classe lo permetta.

Consigliamo di iniziare con problemi, nei quali la prima operazione (non richiesta esplicitamente) sia di immediata intuizione e di effettuarne la risoluzione collettivamente.

Si detti, ad esempio, un problema del tipo seguente:

Problema.

Un merciaio acquista 17 dozzine di bottoncini al prezzo di L. 4 il bottoncino. Quanto spende in tutto?

Fissato, come si è visto precedentemente, il significato dei numeri dati, il maestro solleciterà i bambini a cercare la risoluzione del problema.

Qualcuno osserverà senz'altro che bisogna innanzi tutto calcolare il numero complessivo dei bottoncini.

Sfruttando questa osservazione il maestro, rivolgendosi come di solito ai più lenti, li indurrà a riflettere sul modo di trovare tale numero. Così comincia a farsi strada la considerazione che alla risoluzione di un problema può essere necessaria un'operazione, che non è esplicitamente richiesta.

A questo primo problema ne faranno seguito molti altri (risolti quasi sempre collettivamente) di carattere analogo, sfruttando il concetto di paio, di coppia, usando i mazzi (di fiori, di figurine, ecc.), le scatolette uguali (di pennini, di matite, ecc.), i sacchetti uguali (di palline, di caramelle, ecc.).

Tali problemi richiederanno due delle quattro operazioni, abilmente combinate e variate.

Esempi.

1) Un cartolaio ha 17 scatolette contenenti 24 pennini ciascuna; vende 259 pennini. Quanti gliene restano?

2) Un merciaio ha in negozio 548 calzine uguali; ne vende 196 paia; quante paia di calzine gli restano?

Successivamente, se il maestro noterà fra gli allievi una certa prontezza nell'intuire l'operazione sottintesa, potrà affrontare problemi che, pur avendo le stesse caratteristiche dei precedenti, richiedono un maggior grado di riflessione, per la determinazione della prima operazione come si vede nell'esempio seguente:

Esempio.

Ho comperato m. 7 di nastro ed ho speso L. 238. Se ne avessi comprato solo m. 4, quanto avrei speso?

Siccome nel corso dell'anno scolastico gli alunni imparano ad eseguire le operazioni coi numeri decimali, i problemi di cui sopra potranno avere anche dati decimali; ma il maestro non si preoccupi di usarli presto e spesso, perchè ció che soprattutto conta in terza classe, è l'intuizione delle operazioni necessarie alla risoluzione del problema, intuizione che non deve essere fuorviata da gravose ed inutili complicazioni di calcolo.
Si potranno dare anche problemi con unità del sistema metrico decimale; raccomandiamo però di usare solo le più importanti, o meglio quelle di uso pratico più comune (kg., hg., l., hl., m., cm., km.).

Fra i problemi in cui l'operazione sottintesa è di facile intuizione, ci sono innanzi tutto quelli in cui tale operazione è una trasformazione di unità di misura (equivalenza).

Esempio.

Un oste compera hl. 7,24 di vino, col quale riempie tante damigianine di l. 4 ciascuna. Quante damigianine riempie?

Una trasformazione di unità può anche comparire come operazione sottintesa (in più) in qualunque altro problema; ovviamente questi problemi, che in definitiva richiedono tre operazioni, sono più difficili e saranno riservati al periodo finale dell'anno scolastico.

In terza classe sono esplicitamente richiesti dal programma i problemi sul ricavo, sulla spesa e sul guadagno. In questo campo è facile dare formule o schemi di apparente comodità; ma il maestro deve evitarli in modo assoluto, perchè ciò che conta è l'acquisizione reale dei concetti sunnominati, così comuni e tanto importanti. Ora l'acquisizione da parte degli alunni, potrà avvenire solo attraverso l'esperienza. Questa potrà attuarsi nella classe stessa, se il maestro riuscirà a realizzare esercitazioni e giochi basati sulla compravendita.

Come materiale didattico consigliamo di preparare appositi pacchetti di cartoncini, su ognuno dei quali sia scritto un valore della moneta corrente (L. 5, L. 10, L. 50, L. 2, L. 1); questi cartoncini distribuiti agli alunni, vengono da loro usati negli scambi del commercio scolastico, diretto dal maestro.

Problemi. - Classi IV e V elementare

I problemi di queste classi sono più complessi di quelli di III elementare, come numero di operazioni, esplicitamente richieste o sottintese e più laboriosi nel calcolo; ma concettualmente non sono più difficili (tenuto conto dell'età).

In quarta elmentare il programma richiede che si risolvano problemi sulla tara, sul peso netto e sul peso

lordo, i quali per difficoltà e importanza, sono analoghi a quelli sulla compravendita.

Anche in questi problemi sarà di grande aiuto l'esperienza che tutti gli alunni potranno acquistare direttamente in classe, se c'è a disposizione una bilancia con relativa pesiera (bilancia e pesiera di cui già abbiamo fatto notare l'assoluta necessità a proposito del sistema metrico decimale).

In questa classe vengono pure trattati i problemi inerenti alle figure geometriche piane, per la determinazione dei perimetri e delle aree. Le questioni didattiche relative sono state trattate nell'apposito capitolo (vedi pagina 132); osserviamo soltanto che tali problemi non presentano difficoltà degne di nota.

In quinta classe i problemi sono molto vari, dovendo rispecchiare gli argomenti numerosi e disparati, che fanno parte del programma di tale classe e dei programmi riepilogati delle classi precedenti.

Consigliamo però di non appesantire questi problemi con un numero eccessivo di operazioni, o con calcoli croppo laboriosi, dato che sono già abbastanza lunghi e tomplicati per loro conto.

QUESTIONE DIDATTICA RELATIVA ALLE «INDICAZIONI DI MISURA» NELLA RISOLUZIONE SCRITTA DEI PROBLEMI

Le « indicazioni » nei problemi hanno due scopi:

a) quello di fissare le unità di misura alle quali sono riferiti i dati e i risultati del problema.

b) quello di rappresentare in modo schematico e chiaro il ragionamento che porta ad una certa operazione.

Per tale ragione la questione delle « indicazioni » è molto importante e delicata, tanto è vero che in merito sono frequenti le perplessità, gli errori e le discussioni. *Un modo semplice, comodo e rigoroso* di risolvere in ogni caso la questione, è quello di *racchiudere tra due parentesi* l'operazione indicata, scrivendo a sinistra della prima parentesi e subito dopo il segno di uguaglianza, davanti al risultato, il simbolo dell'*unità di misura relativa al risultato stesso.*

Esempi:

1) Per indicare il risultato (che è un numero di kg.) ottenuto con l'addizione di kg. 12 con kg. 0,9 e con kg. 7,5, si scrive:

kg. (12 + 0,9 + 7,5) = kg. 20,4.

2) Per indicare il risultato (che è un numero di l.) ottenuto togliendo l. 26 da l. 54, si scrive:

l. (54 — 26) = l. 28.

3) Per indicare il prezzo complessivo (in L.) di una dozzina di fazzoletti che costano L. 125 ciascuno, si scrive:

$$\text{L. } (125 \times 12) = \text{L. } 1500.$$

4) Per indicare come si ottiene la superficie di un rettangolo lungo cm. 10,8 e largo cm. 7 (superficie che risulta misurata in cm^2), si scrive:

$$cm^2\ (10{,}8 \times 7) = cm^2\ 75{,}60.$$

5) Per rappresentare come si ottiene l'estensione (in cm^3) di un parallelepipedo lungo cm. 6, largo cm. 8 e alto cm. 10, si scrive:

$cm^2\ (6 \times 8) = cm^2\ 48$	superficie di base
$cm^3\ (48 \times 10) = cm^3\ 480$	estensione del solido

oppure, con una sola indicazione:

$$cm^3\ (6 \times 8 \times 10) = cm^3\ 480.$$

6) Per indicare quante persone si possono accontentare con la somma di L. 25.500, dando L. 1.500 a ciascuna, si scrive:

$$\text{numero di persone } (25.500 : 1500) = \text{numero di persone } 17.$$

7) Per indicare quanti litri di vino contiene ognuna delle quattro damigiane uguali che si sono potute riempire con l. 216, si scrive:

$$\text{l. } (216 : 4) = \text{l. } 54.$$

8) Per indicare quanti centimetri è lunga la base di un rettangolo alto cm. 12, la cui superficie è cm^2 180, si scrive:

$$\text{cm. } (180 : 12) = \text{cm. } 15.$$

9) Per indicare come si ottiene l'altezza (espressa in cm.) di un cilindro di cm^3 2.512 e di raggio cm. 10, si scrive:

cm. $(10 \times 3{,}14) =$ cm. 31,4	semicirconferenza
$cm.^2\ (31{,}4 \times 10) = cm^2\ 314$	superficie base
cm. $(2512 : 314) =$ cm. 8	altezza.

Le « indicazioni » fatte come negli esempi visti, rispondono pienamente allo scopo *a*) di pag. 170, meno allo scopo *b*). Sono rigorose, perchè esprimono una effettiva uguaglianza, sia rispetto ai valori, che rispetto alle unità di misura corrispondenti ed anche perchè hanno

un preciso significato aritmetico; infatti, chiudendo un'operazione tra parentesi, ne viene rappresentato il suo risultato.

Non sono del tutto soddisfacenti allo scopo *b*), perchè il simbolo dell'unità di misura usata è quello che si riferisce, in ogni caso, al risultato e non alle grandezze sulle quali, ragionando, si è operato per risolvere il problema.

C'è un altro tipo di indicazioni, meglio rispondente allo scopo *b*), tipo nel quale si elimina l'uso delle parentesi e che ora esamineremo caso per caso, confrontandolo col precedente.

Nel caso della somma, se si scrive:

$$\text{L. } (150 + 525 + 12) = \text{L. } 687$$

si rappresenta il problema *meno concretamente* che scrivendo:

1) $$\text{L. } 150 + \text{L. } 525 + \text{L. } 12 = \text{L. } 687.$$

Come risulta evidente dalla 1), l'indicazione, per essere esatta, richiede che *i simboli di unità di misura siano uguali e che essi precedano ogni termine dell'operazione e il risultato*.

Analoghe sono le considerazioni per il caso della sottrazione.

Per il caso della moltiplicazione, consideriamo il problema di trovare quanto pesano in tutto 12 pacchi uguali di libri, se ognuno di essi pesa kg. 2,5.

Col primo tipo di indicazioni noi rappresentiamo la risoluzione così:

$$\text{kg. } (2{,}5 \times 12) = \text{kg. } 30 \quad \text{peso complessivo}$$

Ma in questo modo non appare la natura dei dati; infatti l'indicazione può rappresentare anche il peso complessivo di 2 pacchi e mezzo, pesanti ognuno 12 chili.

Invece la scrittura:

2) $$\text{kg. } 2{,}5 \times 12 = \text{kg. } 30$$

rappresenta esclusivamente la somma di kg. 2,5 addizionati 12 volte (tante quanti sono i pacchi), come richiede il problema; quindi è più significativa.

Scritture analoghe alla 2) si possono sempre usare nei casi della moltiplicazione, tenendo presente che *la grandezza che si ottiene, è della stessa specie di quella del moltiplicando e perciò deve avere la stessa indicazione di misura, mentre il moltiplicatore è un numero che indica semplicemente quante volte bisogna addizionare la prima grandezza, per ottenere il risultato; come tale non deve essere preceduto da simbolo alcuno.*

Però le indicazioni come la 2) non sono facili; spesso esigono un ragionamento sottile, per discernere tra i fattori, quale fa l'ufficio di moltiplicatore e gli scolari cadono sovente in errore: basti riflettere ai problemi relativi alle aree e ai volumi delle figure geometriche e a quelli relativi al peso specifico.

Il seguente esempio lo dimostra.

Per ottenere la superficie di un rettangolo lungo cm. 6 e largo cm. 5, si può scrivere significativamente e con rigore così:

3) $$\text{cm.}^2\ 6 \times 5 = \text{cm.}^2\ 30$$

La 3) esprime che il rettangolo è costituito da 5 strisce uguali, alte ciascuna 1 cm. e formate ognuna da 6 cm.^{2}, tanti quanti se ne possono appoggiare, consecutivamente uno all'altro, sulla base del rettangolo. (Vedi fig. 17 e 18 pag. 134).

Ancor più difficile risulta l'estensione del tipo di indicazioni senza parentesi, come la 2), ai vari casi della divisione.

Nel caso della « ripartizione », *l'indicazione di misura*

del quoziente è uguale a quella del dividendo, mentre il divisore è un numero puro e quindi non ha alcuna indicazione di misura.

Ciò si può spiegare, considerando la divisione (*esatta*) come operazione inversa della moltiplicazione.

Esempio.

Quanto costa un metro di stoffa, se comperandone m. 4 ho speso L. 10.000?

La risoluzione si indica così:

L. 10.000 : 4 = L. 2.500

Nel caso della « contenenza », *il dividendo e il divisore (della stessa specie) si rappresentano coi simboli delle loro unità di misura (uguali); il quoziente, invece, è un numero puro e come tale non deve essere accompagnato da alcun simbolo di unità di misura.*

Così, per esempio, nel problema:

Quante damigiane della capacità di l. 18 si possono riempire con l. 450 di olio?

La risoluzione viene rappresentata in questo modo:

4) l. 450 : l. 18 = 25 numero di damigiane.

Nella 4) il quoziente 25 è un numero puro, che si può interpretare come il numero delle volte che bisogna addizionare l. 18 per avere l. 450 (divisione concepita come operazione inversa della moltiplicazione); inoltre il 1° membro della (4) non rappresenta che il rapporto tra la grandezza l. 450 e la grandezza l. 18, come tale rappresenta un numero puro, proprio come il 2° membro. La 4) è dunque pienamente valida.

OSSERVAZIONE. – Il tipo di indicazione come la (4) vale anche nel caso in cui il problema di contenenza si riferisca a gruppi, o di oggetti, o

di animali, o di persone. Infatti questi gruppi, essendo composti da elementi della stessa natura, possono essere confrontati e addizionati: soddisfano quindi ai requisiti necessari per essere considerati « grandezze ».

Nei casi dei problemi inversi relativi alle figure geometriche, la spiegazione dell'uso delle *indicazioni senza parentesi*, diventa molto complessa ed evoluta e richiede, perciò, un eccessivo sforzo intuitivo e logico.

L'esempio seguente lo dimostra in modo abbastanza chiaro.

Problema. Calcolare la lunghezza della base di un rettangolo di superficie cm.^{2} 30 e alto cm. 5.

Indicazioni.

cm.^{2} 30 : 5 = cm.^{2} 6 superficie di una delle 5 strisce alte 1 cm., in cui può essere scomposto il rettangolo.

cm.^{2} 6 : cm.^{2} 1 = 6

numero dei quadratini di lato 1 cm, che si possono appoggiare, consecutivamente uno all'altro, sulla base, i quali sono tanti quanti sono i centimetri contenuti nella base stessa, la quale risulta pertanto di cm. 6.

Conclusione.

Dall'esame di tutti i casi riportati, risulta che le indicazioni del tipo visto per primo (con parentesi) sono le più idonee ad essere usate, anche se meno significative delle altre, sia per la loro semplicità e generalità, sia perchè evitano molti e facili errori.

Osservazione I. – In generale ogni « indicazione » di tipo diverso dai due esaminati è errata, a meno che non si riduca a una semplice relazione numerica, nel quale caso serve solo a rappresentare un'operazione aritmetica.

Gli esempi che seguono riproducono alcuni tra gli *errori* più comuni

(1) L. 500 + 740 + 380 = L. 1620.

L'indicazione della somma è completamente errata, perchè gli addendi non sono omogenei; infatti il primo rappresenta una somma di danaro, cioè una grandezza, mentre gli altri due sono numeri puri.

(2) $\quad$ L. 420 × kg. 5 = L. 2100.

L'indicazione del prodotto è gravemente errata, perchè non ha senso moltiplicare una grandezza per un'altra: il moltiplicatore è *sempre* un numero puro.

(3) $\quad$ m. 52 × m. 3 = m^2 156.

Anche in questo, come nel caso precedente, si osserva che il primo membro dell'uguaglianza è privo di senso; inoltre il risultato non è omogeneo col moltiplicando.

Se qualcuno fosse tentato di ritenere valida la (3), appellandosi a reminiscenze algebriche, ricordi che non può farlo perchè l'algebra è scienza che si occupa *esclusivamente* dei numeri e delle operazioni su di essi; invece la relazione (3) esprime un'operazione fra grandezze: in altre parole la lettera « *m* » della (3) sta per « metri » e non è un numero!

(4) $\quad$ m^2. 144 : m. 10 = m. 14,4.

Questa indicazione è completamente errata: due sono gli errori fondamentali; nel primo membro appare un rapporto fra grandezze di specie diversa (ciò non ha senso), nel secondo membro appare una grandezza che in nessun modo può ritenersi il rapporto fra le prime due (il rapporto è un numero!).

Osservazione II. – A rigore tutte le indicazioni cadono in difetto nel caso di una divisione con resto diverso da zero. Infatti, in questo caso, non essendo il dividendo uguale al prodoto del quoziente per il divisore, il segno di uguaglianza non potrebbe essere messo.

Tuttavia nella pratica si sorvola su questo particolare.

È necessario però far osservare agli alunni che il *resto ha sempre la stessa natura del dividendo.*

RISOLUZIONE ARITMETICA DI PROBLEMI DEDOTTA DALLA RELATIVA RISOLUZIONE ALGEBRICA

Qualche volta in quarta e in quinta elementare si possono presentare problemi, la cui risoluzione aritmetica non è semplice, sia come intuizione delle operazioni necessarie, sia come spiegazione delle medesime agli alunni.

I maestri, abituati dagli studi fatti alla risoluzione algebrica dei problemi, la quale, attraverso un algoritmo abbastanza semplice (per il 1° grado) riduce le varie difficoltà all'impostazione di un'equazione, possono trovarsi imbarazzati, quando debbono arrivare al risultato richiesto, attraverso una successione di operazioni (proprie del procedimento aritmetico) da giustificarsi una per una.

Ora, il procedimento algebrico, impostata l'equazione, non è che un succedersi di passaggi, ciascuno dei quali ha riscontro nelle operazioni del procedimento aritmetico.

Ne risulta che, trovata la risoluzione algebrica, interpretandone convenientemente i passaggi, si può da essa ricavare la corrispondente risoluzione aritmetica.

Il maestro, esercitato sull'argomento, potrà sempre all'occorrenza adattare il proprio procedimento logico, più rapido ed evoluto, a quello più elementare dei propri allievi.

Diamo alcuni esempi dimostrativi:

Problema 1. — Una somma di L. 41.500 va divisa fra 3 persone in modo che alla seconda tocchino L. 2.500 più della prima e L. 500 meno della terza. Quanto tocca a ogni persona?

Risoluzione algebrica con interpretazione

Sia x la somma che tocca alla 1ª persona;
$(x + 2.500)$ è la somma che tocca alla 2ª persona;
$[(x + 2.500) + 500]$ è la somma che tocca alla 3ª persona.

Si può stabilire la seguente equazione:

$$x + (x + 2.500) + [(x + 2.500) + 500] = 41.500$$

Risolvendo e interpretando si ha:

$$3\,x + 5.500 = 41.500$$

5.500 è la somma di 2.500 + 2.500 + 500: rappresenta quindi la somma che devono avere, complessivamente più della 1ª, le altre due persone.

$$3\,x = 41.500 - 5.500$$

togliendo 5.500 da 41.500, si ottiene allora una somma tripla di quella che tocca alla prima.

$$x = \frac{41.500 - 5.500}{3} = \frac{36.000}{3} = \frac{2000.}{1}$$

dividendo la differenza effettuata, cioè 36.000 per 3 si ottiene la somma che tocca alla prima.

È facile poi trovare le somme che toccano alle altre due persone.

La risoluzione aritmetica che se ne deduce è dunque la seguente:

L. 2.500 + L. 2.500 + L. 500 = L. 5.500 somma che la 2ª e la 3ª persona hanno complessiavmente più della 1ª

L. 41.500 — L. 5.500 = L. 36.000 somma da dividersi in tre parti uguali a quella che tocca alla 1ª.

L. 36.000 : 3 = L. 12.000 somma che tocca alla 1ª
L. 12.000 + L. 2.500 = L. 14.500 somma che tocca alla 2ª
L. 14.500 + L. 500 = L. 15.000 somma che tocca alla 3ª

Alle tre persone toccano dunque L. 12.000, L. 14.500, L. 15.000.

Problema 2. — In un cortile ci sono 18 animali, fra polli e conigli; in tutto le zampe sono 56. Quanti sono i polli?

Risoluzione algebrica con interpretazione

Sia x il numero dei polli; $18 - x$ è allora il numero dei conigli; le zampe dei polli saranno $2 \times x$ e quelle dei conigli $4 \times (18 - x)$; si potrà allora stabilire l'equazione:

$$2x + 4(18 - x) = 56$$

Risolvendo e interpretando si ha:

$2x + 72 - 4x = 56$ — $72 = 4 \cdot 18$ è il numero delle zampe che si avrebbero se gli animali fossero tutti quadrupedi.

$72 - 2x = 56$
$72 - 56 = 2x$
$16 = 2x$ — $72 - 56 = 16$ è il numero delle zampe mancanti ai ... polli per essere ... quadrupedi.

$x = \frac{16}{2} = 8$ — Ad ogni coppia di zampe mancanti corrisponde un animale non quadrupede, cioè un pollo, per cui i polli sono tanti quante le coppie di zampe mancanti, ossia tante quante volte *due sta in sedici*.

La risoluzione aritmetica che se ne deduce è dunque la seguente:

$4 \times 18 = 72$	numero di zampe che gli animali avrebbero in tutto se fossero tutti quadrupedi.
$72 - 56 = 16$	numero di zampe che si hanno in meno, perchè alcuni animali sono bipedi.
$16 : 2 = 8$	coppie di zampe che si hanno in meno e siccome per ogni coppia c'è un animale bipede invece che quadrupede, 8 è anche il numero dei polli.

Il numero dei polli è 8.

Problema 3. — Un pollivendolo ha comperato un certo numero di uova, spendendo una certa somma. Rivendendoli a L. 35 l'uno perderebbe L. 500; rivendendoli invece a L. 45 l'uno, guadagnerebbe L. 1.000. Trovare il numero delle uova e la spesa sostenuta dal pollivendolo per l'acquisto.

Risoluzione algebrica con interpretazione

Sia x il numero delle uova e y il relativo prezzo d'acquisto. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} 35\,x = y - 500 \\ 45\,x = y + 1.000 \end{cases}$$

Risolvendo col metodo di riduzione si ottiene:

$$\begin{cases} 45\,x - 35\,x = 1.000 - (-500) \\ 45\,x = y + 1.000 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} 10\,x = 1.500 \\ 45\,x = y + 1.000 \end{cases}$$

differenza di incasso tra le due vendite; 10 è la differenza dei due prezzi di rivendita per ogni uovo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{1500}{10} = 150 \\ 45\,x = y + 1.000 \end{cases}$$

Poichè la differenza d'incasso per ogni uovo è di L. 10, le uova sono tante quante volte 10 sta in 1500, che è la differenza d'incasso totale.

$$\begin{cases} x = 150 \text{ numero uova.} \\ 45 \cdot 150 = y + 1.000 \text{ ricavo della seconda ipotetica vendita.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150 \\ 6.750 - 1.000 = y \text{ spesa del pollivendolo.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150 \\ y = 5.750 \end{cases}$$

La risoluzione aritmetica si prospetta quindi come segue:

L. 45 — L. 35 = L. 10 differenza di incasso fra le due vendite per ogni uovo.

L. 1.000 + L. 500 = L. 1.500 differenza totale fra i due incassi.

1.500 : 10 = 150 numero delle uova.

L. 45 × 150 = L. 6.750 somma che si incasserebbe nella seconda vendita.

L. 6.750 — L. 1.000 = L. 5.750 prezzo d'acquisto per tutte le uova.

Il pollivendolo ha comperato 150 uova e ha speso per esse L. 5.750.

Problema 4. — Il perimetro di un campo rettangolare è m. 392; la lunghezza misura m. 28 più della larghezza. Quale ne è l'area?

Risoluzione algebrica con interpretazione

Siano x e y le misure della lunghezza e della larghezza; in base ai dati del problema si può impostare il sistema:

$$\begin{cases} x = y + 28 \\ 2x + 2y = 392 \end{cases}$$

risolvendo si ha (col metodo di sostituzione):

$$\begin{cases} x = y + 28 \\ 2(y + 28) + 2y = 392 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 28 \\ 2y + 2 \cdot 28 + 2y = 392 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 28 \\ 4y + 2 \cdot 28 = 392 \end{cases}$$ il perimetro è dunque formato da 4 segmenti uguali alla larghezza e da 2 segmenti lunghi ognuno m. 28.

$$\begin{cases} x = y + 28 \\ 4y = 392 - 56 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 28 \\ 4y = 336 \end{cases}$$ quadruplo della larghezza.

$$\begin{cases} x = y + 28 \\ y = \dfrac{336}{4} = 84 \end{cases}$$ larghezza.

$$\begin{cases} x = 84 + 28 = 112 \\ y = 84 \end{cases}$$ lunghezza.

La risoluzione aritmetica è dunque la seguente:

m. 392 — m. 28 — m. 28 = m 336 quanto sarebbe lungo il perimetro se la lunghezza fosse uguale alla larghezza.

m. 336 : 4 = m. 84 larghezza.

m. 84 + m. 28 = m. 112 lunghezza.

Area rettangolo = misura base × misura altezza = = 112 × 84 = 9.408.

INDICE

Programma di Aritmetica e Geometria per le Scuole Elementari . . . pag. 1

Questione didattica sulla scrittura dei numeri . . . » 5
Nota storica sulla scrittura dei numeri . . . » 11

Questioni didattiche sulle frazioni . . . » 12
Esempio di lezione sull'unità frazionaria . . . » 12
Lezione sul concetto di frazione . . . » 17
Frazioni proprie e improprie . . . » 23
Confronto tra frazioni e operazioni su di esse . . . » 25
Frazioni ordinarie e frazioni decimali . . . » 28
Nota storica sulle frazioni . . . » 36

Questione didattica sulle unità decimali e sui numeri decimali . . . » 37
Nota storica sui numeri decimali . . . » 46

Questioni didattiche sulle operazioni nelle cinque classi elementari . . . » 47
Addizione - Classe I elementare . . . » 50
Esempio di gioco: tombola . . . » 52
Addizione - Classe II elementare . . . » 53
Addizione - Classe III elementare . . . » 54
Addizione - Classi IV e V elementare . . . » 56
Sottrazione - Classe I elementare . . . » 56
Sottrazione - Classe II elementare . . . » 62
Prestito e Riporto . . . » 65
Sottrazione - Classi III, IV, V elementare . . . » 67
Moltiplicazione - Classe I elementare . . . » 67
Moltiplicazione - Classe II elementare . . . » 68
Moltiplicazione - Classe III elementare . . . » 71

Moltiplicazione - Classi IV e V elementari . . . . . . pag. 74
Divisione - Classe I elementare . . . . » 76
Lezione sul concetto di quoziente (contenenza) . . . . . » 77
Lezione sul concetto di quoziente (ripartizione) . . . . . » 80
Divisione - Classe II elementare . . . . » 82
Divisione - Classe III elementare . . . . » 84
Divisione - Classe IV elementare . . . . » 87
Divisione - Classe V elementare . . . . » 89
Nota storica sulle quattro operazioni . . . . » 90

Questione didattica relativa alle prove delle operazioni . » 92

Questioni didattiche relative al sistema metrico decimale . » 97
Nota storica sul sistema metrico decimale . . . . . . » 107

Questioni didattiche sul peso specifico . . . . . . » 109
Lezione sul peso specifico assoluto . . . . » 110

Questioni didattiche relative alle figure geometriche piane » 115
Triangoli . . . . » 116
Quadrilateri, trapezi, parallelogrammi . . . . . . » 119
Poligoni regolari . . . . » 122
Circonferenza e cerchio . . . . » 125

Questione didattica sul numero π e sui « numeri fissi » . . » 126
Lezione su π . . . . » 126
Numeri fissi dei poligoni regolari . . . . » 129

Questioni didattiche sulle aree delle superfici dei poligoni e del cerchio . . . . » 132
Rettangolo . . . . » 133
Parallelogramma . . . . » 135
Rombo . . . . » 136
Triangolo . . . . » 137
Trapezio . . . . » 138
Poligono regolare . . . . » 139
Cerchio e settore circolare . . . . » 140

Questioni didattiche relative ai solidi geometrici . . . . » 143
Area della superficie di una sfera . . . . » 150
Volumi dei solidi . . . . » 152
Parallelepipedo rettangolo . . . . » 152
Volume del prisma . . . . » 153
Volume della piramide . . . . » 154
Volume del cilindro . . . . » 155

Volume del cono . . . . pag. 156
Volume della sfera . . . . » 157
Volumi dei solidi non geometrici . . . . » 159

Il problema e la sua risoluzione . . . . » 161
Problemi in I e II elementare . . . . » 163
Problemi in III elementare . . . . » 163
Problemi in IV e V elementare . . . . » 168

Questione didattica relativa alle «Indicazioni di misura» . » 170

Risoluzione aritmetica di problemi dedotta dalla relativa risoluzione algebrica . . . . » 177